Done #

Got by

OSMANIA UNIVERSITY

جامعۂ عثمانیہ

ہندسۂ تحلیلی

سلسلۂ نصاب تعلیم جامعۂ عثمانیہ

ہندسۂ تحلیلی

ANALYTICAL GEOMETRY

تالیف

(برائے بی۔اے و بی۔ایس سی)

مولفہٗ

محمد خواجہ محی الدین صاحب، ایم۔اے

ریڈر شعبۂ ریاضی جامعۂ عثمانیہ

ڈاکٹر وی۔پی۔ وینکٹا چاری صاحب

ایم۔اے، پی۔ایچ۔ڈی، ڈی۔آئی۔سی (لندن)

ریڈر شعبۂ ریاضی جامعۂ عثمانیہ

۱۳۵۹ف م ۱۹۴۹ع

عثمانیہ یونیورسٹی پریس حیدرآباد دکن

طبع اول .... (۵۰۰)

نشان .... (۳۸۷)

دیباچہ

ہندسۂ تحلیلی

مجلس نصاب ریاضی کی سفارش اور ارباب جامعۂ عثمانیہ کی منظوری کی بنا پر موجودہ نصاب امتحان بی۔ اے اور بی۔ ایس سی جامعۂ عثمانیہ کے مطابق ہندسۂ تحلیلی پر یہ مختصر رسالہ تالیف کیا گیا ہے۔ یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ بی۔ اے کے طالب علم ہندسۂ تحلیلی کے اُن تمام ابتدائی مسئلوں اور نتیجوں سے واقف ہیں جو امتحان انٹرمیڈیٹ کے نصاب میں داخل ہیں۔ اس لیے اس تالیف میں اِن ابتدائی حصوں پر مزید بحث نہیں کی گئی ہے۔ چونکہ کافی وسیع نصاب پر ایک مختصر رسالہ تالیف کرنا مقصود تھا' اس لیے تقریباً (۱۵۰) مشقی سوالات' بطور نمونہ دیے گئے ہیں۔ مزید مشقی سوالات کے لیے مندرجۂ ذیل مستند انگریزی کتابوں سے استفادہ کیا جا سکتا ہے :۔

(1) S. L. Loney: Coordinate Geometry Part I & II
(2) C. Smith: Conic Sections
(3) E. H. Askwith: The Analytical Geometry of the Conic Sections
(4) Bell: Coordinate Geometry of three Dimensions
(5) C. Smith: Solid Geometry

اس تالیف کی تیاری میں مندرجۂ بالا کتابوں سے کافی مدد لی گئی ہے۔

جامعۂ عثمانیہ
مہر ۱۳۵۸ف

محمد خواجہ محی الدین
وی۔ پی۔ وینکٹاچاری

فہرست مضامین

ہندسۂ تحلیلی

باب	صفحہ

ہندسۂ تحلیلی

پہلا باب

سابقہ معلومات

یہ مان لیا جاتا ہے کہ قائم کارٹیزی محوروں کی صورت میں ہندسۂ تحلیلی کے حسب ذیل نتیجوں سے طالب علم واقف ہے :-

ا نقطے —

۱۔ اگر محوروں و لا، و ما کے حوالے سے نقطہ ن کے محدد (لا، ما) ہوں اور محوروں کی سمتوں کو برقرار رکھ کر مبداء کو نقطہ و_1 $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ پر منتقل کیا جائے تو نئے محوروں کے حوالے سے نقطہ ن کے محدد $(\text{لا} - \text{لا}_1، \text{ما} - \text{ما}_1)$ ہونگے۔

۲۔ نقاط ن_1 $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور ن_2 $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ کے درمیانی فاصلے کا مربع $= (\text{لا}_1 - \text{لا}_2)^2 + (\text{ما}_1 - \text{ما}_2)^2$

۳- اگر نقاط $\text{ن}_1\,(\text{لا}_1،\ \text{ما}_1)$ اور $\text{ن}_2\,(\text{لا}_2،\ \text{ما}_2)$ میں سے گزرنے والے خط پر نقطہ ط (لاَ، ماَ) اس طرح لیا جائے کہ

$$\frac{\text{ن}_1\text{ط}}{\text{ط ن}_2} = \frac{\text{م}_2}{\text{م}_1} \quad \text{تو}\quad \text{لاَ} = \frac{\text{م}_1\text{لا}_1 + \text{م}_2\text{لا}_2}{\text{م}_1 + \text{م}_2} \quad \text{اور}\quad \text{ماَ} = \frac{\text{م}_1\text{ما}_1 + \text{م}_2\text{ما}_2}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$$

نوٹ - داخلی تقسیم کی صورت میں م_1 اور م_2 دونوں مثبت ہونگے اور خارجی تقسیم کی صورت میں م_1 اور م_2 کی علامتیں مختلف ہونگی -

۴- نقاط $\text{ن}_1\,(\text{لا}_1،\ \text{ما}_1)$، $\text{ن}_2\,(\text{لا}_2،\ \text{ما}_2)$، $\text{ن}_3\,(\text{لا}_3،\ \text{ما}_3)$ سے بننے والے مثلث کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & 1 \\ \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \\ \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\text{لا}_1(\text{ما}_2 - \text{ما}_3) + \text{لا}_2(\text{ما}_3 - \text{ما}_1) + \text{لا}_3(\text{ما}_1 - \text{ما}_2)\right\}$$

نوٹ - اگر مثلث $\text{ن}_1\text{ن}_2\text{ن}_3$ کے محیط پر ان ہی نقطوں کی ترتیب میں حرکت کرنے سے مثلث کا رقبہ بائیں جانب واقع ہو تو رقبہ مثبت تصور کیا جائیگا اور اگر دائیں جانب واقع ہو تو منفی تصور کیا جائیگا - اس قرارداد کے مطابق اوپر کے ضابطے کی مدد سے مثلث کا رقبہ مع علامت حاصل ہوگا -

۵- اگر نقاط ن_1، ن_2، ن_3 ہم خط ہوں تو مثلث $\text{ن}_1\text{ن}_2\text{ن}_3$ کا رقبہ = صفر یعنی $\sum \text{لا}_1(\text{ما}_2 - \text{ما}_3) = \text{صفر}$ نیز اس شرط کے پورا ہونے پر نقاط ن_1، ن_2، ن_3 ہم خط ہونگے -

۲ خط مستقیم —

۱- نقاط ن_1، ن_2 میں سے گزرنے والے خط کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_1 - \text{لا}_2} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_1 - \text{ما}_2} \quad \text{یعنی} \quad (\text{ما} - \text{ما}_1) = \frac{\text{ما}_1 - \text{ما}_2}{\text{لا}_1 - \text{لا}_2} (\text{لا} - \text{لا}_1)$$

۲- حوالے کے محوروں پر طول ا اور ب والے مقطوعے کاٹنے والے خط کی مساوات ہے $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = 1$

نوٹ- اگر ا ← ∞ تو لا-محور کے متوازی خط حاصل ہوگا اور اس خط کی مساوات ہوگی ما = ب

اگر ب ← ∞ تو ما-محور کے متوازی خط حاصل ہوگا اور اس خط کی مساوات ہوگی لا = ا

اگر ا ← ∞ اور ب ← ∞ تو خط کی مساوات ہو جائیگی صفر = ۱ اور اس مساوات سے لاتناہی پر کا خط تعبیر ہوگا۔

۳- اگر ایک خط لا-محور کی مثبت سمت سے زاویہ ط بنائے اور ما-محور پر طول ب والا مقطوعہ کاٹے تو اس خط کی مساوات ہوگی ما = لا مس ط + ب

نوٹ- اگر کسی خط کی مساوات کو مندرجۂ بالا شکل میں لایا جائے تو اس کی مدد سے خط اور لا-محور کا درمیانی زاویہ اور ما-محور پر کا مقطوعہ معلوم ہوتا ہے۔ عام طور پر مس ط کو م سے تعبیر کیا جاتا ہے اور یہ مقدار م خط کا میلان یا ڈھال کہلاتی ہے یعنی خط ما = م لا + ب محور لا کے ساتھ زاویہ مس^{-1} م بناتا ہے۔

۴- اُس خط کی مساوات جو نقطہ ن_1 $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ میں سے گزرتا ہے اور جس کا میلان م ہے حسب ذیل ہے:-

$$(\text{ما} - \text{ما}_1) = \text{م} (\text{لا} - \text{لا}_1)$$

نوٹ- اس خط کی مساوات کا مقابلہ (۱) سے کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ نقاط ن_1 $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور ن_2 $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ میں سے گزرنے والے خط کا میلان $\frac{\text{ما}_1 - \text{ما}_2}{\text{لا}_1 - \text{لا}_2}$ ہے۔

۵- اگر ایک خط پر مبدا سے کھینچے ہوئے عمود کا طول ع ہو اور یہ عمود لا-محور سے زاویہ عہ بنائے تو خط کی مساوات ہوگی لا جم عہ + ما جب عہ = ع

۶ - درجہ اول کی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ سے ہمیشہ ایک خط مستقیم تعبیر ہوتا ہے۔

۷ - نتیجہ (۵) سے حاصل ہوتا ہے کہ مبدا سے خط ا لا + ب ما + ج = ۰ پر کے عمود کا طول = $\frac{|ج|}{\sqrt{ا^2 + ب^2}}$ اور نقطہ ن۱ (لا۱، ما۱) سے اس خط پر کے عمود کا طول = $\frac{|ا لا_1 + ب ما_1 + ج|}{\sqrt{ا^2 + ب^2}}$

۸ - نقاط ن۱ (لا۱، ما۱) اور ن۲ (لا۲، ما۲) خط ا لا + ب ما + ج = ۰ کی ایک ہی جانب یا مخالف جانبوں میں واقع ہونگے بموجب اس کے کہ (ا لا۱ + ب ما۱ + ج) اور (ا لا۲ + ب ما۲ + ج) کی علامتیں ایک ہی ہیں یا مختلف ہیں۔

۹ - خطوط ما = م۱ لا + ب۱ اور ما = م۲ لا + ب۲ کا درمیانی زاویہ = مس$^{-1}$ $\left(\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}\right)$ جبکہ زاویہ کو دوسرے خط سے پہلے خط کی طرف ناپا جائے۔

نوٹ - مذکورۂ بالا خطوط علی القوائم ہونگے اگر ۱ + م۱ م۲ = صفر یعنے م۱ م۲ = -۱ اور متوازی ہونگے اگر م۱ = م۲

۱۰ - خطوط ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ = ۰ اور ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲ = ۰ کا نقطہ تقاطع ان خطوط کی مساواتوں کو ہمزاد مساواتوں کی طرح حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور نقطہ تقاطع کے محدد ہیں $\left(\frac{ب_1 ج_2 - ب_2 ج_1}{ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1} ، \frac{ج_1 ا_2 - ج_2 ا_1}{ا_1 ب_2 - ا_2 ب_1}\right)$

نوٹ - یہ خط متوازی ہونگے اگر ا۱ ب۲ - ا۲ ب۱ = ۰، یعنی اگر ا۱، ب۱ متناسب ہوں ا۲، ب۲ کے۔

۱۱ - خطوط ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ = ۰، ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲ = ۰، ا۳ لا + ب۳ ما + ج۳ = ۰ متراکز ہونگے اگر

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{۱} & \text{ب}_{۱} & \text{ج}_{۱} \\ \text{ا}_{۲} & \text{ب}_{۲} & \text{ج}_{۲} \\ \text{ا}_{۳} & \text{ب}_{۳} & \text{ج}_{۳} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

۱۲- مساوات $\text{ا لا}^{۲} + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^{۲} = \text{صفر}$ سے مبداء میں سے گزرنے والے خطوں کا ایک جوڑا تعبیر ہوتا ہے۔ اگر اِن خطوں کی مساواتیں شکل $\text{ما} = \text{م}_{۱}\,\text{لا}$ اور $\text{ما} = \text{م}_{۲}\,\text{لا}$ میں لی جائیں تو $\text{م}_{۱} + \text{م}_{۲} = -\frac{۲\text{ھ}}{\text{ب}}$ اور $\text{م}_{۱}\text{م}_{۲} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$

اگر اِن خطوں کا درمیانی زاویہ فہ ہو تو $\text{مس فہ} = \frac{۲\sqrt{\text{ھ}^{۲} - \text{اب}}}{\text{ا} + \text{ب}}$ - یہ خط منطبق ہونگے اگر $\text{ھ}^{۲} - \text{اب} = \text{صفر}$ اور علی القوائم ہونگے اگر $\text{ا} + \text{ب} = \text{صفر}$۔

۱۳- خطوط $\text{ا لا}^{۲} + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^{۲} = \text{صفر}$ کے درمیانی زاویوں کے ناصفوں کی مشترک مساوات ہوگی $\frac{\text{لا}^{۲} - \text{ما}^{۲}}{\text{ا} - \text{ب}} = \frac{\text{لا ما}}{\text{ھ}}$

نوٹ - یہ تصدیق کی جائے کہ یہ ناصف علی القوائم ہیں۔

۱۴- درجۂ دوم کی عام مساوات $\text{ا لا}^{۲} + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^{۲} + ۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج} = \text{صفر}$ سے خطوط مستقیم کا ایک جوڑا تعبیر ہوگا اگر

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$ یعنی اگر $\text{اب ج} + ۲\,\text{ف گ ھ} - \text{اف}^{۲} - \text{ب گ}^{۲} - \text{ج ھ}^{۲} = \text{صفر}$

اور اس شرط کے پورا ہونے کی صورت میں خطوط کا نقطہ تقاطع $(\text{لا}_{۱}، \text{ما}_{۱})$ مساواتوں $\text{ا لا}_{۱} + \text{ھ ما}_{۱} + \text{گ} = \text{صفر}$، $\text{ھ لا}_{۱} + \text{ب ما}_{۱} + \text{ف} = \text{صفر}$ کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

نیز دیے ہوئے خطوں کا درمیانی زاویہ وہی ہوتا ہے جو خطوں $\text{ا لا}^{۲} + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^{۲} = ۰$ کا ہے۔ چنانچہ مبداء میں سے گزرنے والے یہ خط دیے ہوئے

خطوں کے متوازی ہیں۔

۳ دائرہ —

۱ - اس دائرے کی مساوات جس کا مرکز ھ (لا، ما) پر ہو اور نصف قطر ا ہو حسب ذیل ہوگی

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما} - \text{ما}_1)^2 = \text{ا}^2$$

نوٹ - اس مساوات سے ظاہر ہے کہ دائرے کی مساوات میں لا ما والی رقم موجود نہیں ہوتی اور لا^2 کا سر = ما^2 کا سر۔

پس مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}\,\text{لا} + 2\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = 0$ سے ایک دائرہ تعبیر ہوتا ہے۔

اس مساوات کو شکل $(\text{لا} + \text{گ})^2 + (\text{ما} + \text{ف})^2 = \text{گ}^2 + \text{ف}^2 - \text{ج}$ میں لکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ اس دائرے کا مرکز (-گ، -ف) ہے اور نصف قطر

$$= \sqrt{\text{گ}^2 + \text{ف}^2 - \text{ج}}$$

دائرے کا نصف قطر حقیقی ہوگا اگر $(\text{گ}^2 + \text{ف}^2 - \text{ج}) \geq$ صفر اور خیالی ہوگا اگر $(\text{گ}^2 + \text{ف}^2 - \text{ج}) <$ صفر۔

وہ دائرہ جس کا نصف قطر صفر ہو نقطہ دائرہ کہلاتا ہے اور وہ دائرہ جس کا نصف قطر خیالی ہو خیالی دائرہ کہلاتا ہے۔

دائرے کی عام مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}\,\text{لا} + 2\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} =$ صفر میں تین مستقل ف، گ، ج ہیں اور اس سے ظاہر ہے کہ ایک دائرہ پورا پورا متعین ہوتا ہے اگر تین غیر تابع شرطیں دی جائیں جنہیں دائرہ پورا کرتا ہے۔ مثلاً اگر تین نقطے جو ہم خط نہ ہوں دیے جائیں تو ان میں سے ایک اور صرف ایک دائرہ گزرتا ہے اور اس دائرے کی مساوات معلوم کی جا سکتی ہے۔

۲ - دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}\,\text{لا} + 2\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = 0$ پر کے کسی نقطہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ پر کے مماس کی مساوات ہے۔

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 + \text{گ}(\text{لا} + \text{لا}_1) + \text{ف}(\text{ما} + \text{ما}_1) + \text{ج} = 0$$

اور عماد کی مساوات ہے

$$\frac{لا - لا_1}{لا_1 + گ} = \frac{ما - ما_1}{ما_1 + ف}$$

نوٹ ۔ اس دائرے کے نقطۂ ن₁ پر کا مماس اس نصف قطر پر عمود وار ہوتا ہے جو ن₁ میں سے گزرتا ہے اور ن₁ پر کا عماد ن₁ میں سے گزرنے والا نصف قطر ہے ۔

۳ ۔ ایک خطِ مستقیم ایک دائرے کو مس کریگا اگر دائرے کے مرکز سے اس خط پر کے عمود کا طول دائرے کے نصف قطر کے مساوی ہو ۔ مثلاً خط $ما = م\,لا + ج$ دائرہ $لا^2 + ما^2 = ا^2$ کو مس کریگا اگر $\frac{|ج|}{\sqrt{1 + م^2}} = ا$ یعنی اگر $ج^2 = ا^2 (1 + م^2)$ ۔

اس نتیجے سے معلوم ہوتا ہے کہ م کی ہر قیمت کے لیے خط $ما = م\,لا + ا\sqrt{1 + م^2}$ دائرہ $لا^2 + ما^2 = ا^2$ کو مس کرتا ہے ۔

۴ ۔ دو دائرے ایک دوسرے کو خارجاً مس کرینگے اگر ان کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ ان کے نصف قطروں کے مجموعہ کے مساوی ہو اور داخلاً مس کرینگے اگر ان کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ ان کے نصف قطروں کے فرق کے مساوی ہو ۔

۵ ۔ اگر $س = 0$ اور $س' = 0$ دو دائرے ہوں اور ک کوئی مستقل ہو تو $س + ک\,س' = 0$ سے ایک ایسا دائرہ تعبیر ہوگا جو دیے ہوئے دو دائروں کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے بشرطیکہ مساوات $س + ک\,س' = 0$ خط مستقیم کو تعبیر نہ کرے ۔ اگر $س + ک\,س' = 0$ سے خط مستقیم تعبیر ہوتا ہے تو یہ خط دیے ہوئے دو دائروں کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والا خط ہوگا یعنی دیے ہوئے دو دائروں کا بنیادی محور ہوگا ۔

۶ ۔ اگر $س = 0$ ایک دائرہ ہو اور $ل = 0$ ایک خط مستقیم ہو تو $س + ک\,ل = 0$ سے ایک دائرہ تعبیر ہوگا جو $س = 0$ اور $ل = 0$ کے نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے ۔

۴ مخروطی تراشیں —

۱- اگر س (لا$_1$، ما$_1$) ایک ثابت نقطہ ہو اور ل = ۰ ایک خط مستقیم ہو اور نقطہ ن (لا، ما) خط ل = ۰ اور نقطہ س (لا$_1$، ما$_1$) کی مستوی سطح میں اس طرح حرکت کرے کہ ن س = ز × ن ع، جہاں ن ع عمود وار ہے خط ل = ۰ پر اور ز ایک دی ہوئی مستقل مقدار ہے تو ن کا طریق ایک مخروطی تراش کہلاتا ہے۔

نقطہ س کو اس مخروطی کا ماسکہ کہتے ہیں اور خط ل = ۰ کو مخروطی کا مرتب کہتے ہیں اور مستقل مقدار ز کو مخروطی کا خروج المرکز کہتے ہیں۔

مخروطی مکافی کہلاتا ہے اگر ز = ۱

" ناقص " " ز < ۱

" زائد " " ز > ۱

نوٹ - آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ مخروطی کی مساوات درجہ دوم کی ہوتی ہے۔

۲- مکافی کی معیاری مساوات ہے ما^2 = ۴ ا لا - اس مکافی کا راس مبدا پر ہے، ماسکہ نقطہ (ا، ۰) پر ہے، مرتب خط مستقیم لا + ا = ۰ ہے اور وتر خاص کا طول ۴ ا ہے۔ مکافی کا محور تشاکل لا - محور پر ہے اور راس پر کا مماس ما - محور پر ہے۔

مکافی کے نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) پر کے مماس کی مساوات ہے ما ما$_1$ = ۲ ا (لا + لا$_1$)

اور عماد کی مساوات ہے (ما - ما$_1$) = - $\frac{ما_1}{۲ا}$ (لا - لا$_1$)

خط ما = م لا + ج مکافی ما^2 = ۴ ا لا کو مس کرتا ہے اگر ج = $\frac{ا}{م}$ یعنی م کی ہر قیمت کے لیے خط مستقیم ما = م لا + $\frac{ا}{م}$ مکافی ما^2 = ۴ ا لا کو مس کرتا ہے اور نقطہ تماس کے محدد ہیں ($\frac{ا}{م^2}$، $\frac{۲ا}{م}$)۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ م کی ہر قیمت

کے لیے نقطہ $(\text{ا مہ}^{۲} ، \text{۲ ا مہ})$ مکافی $\text{ما}^{۲} = \text{۴ ا لا}$ پر واقع ہوتا ہے۔ ''مہ'' کو جس کی رقوم میں نقطہ کے محدد دیے گئے ہیں ''متبدل'' کہتے ہیں۔ نقطہ $(\text{ا مہ}^{۲} ، \text{۲ ا مہ})$ پر کے مماس کا میلان $= \frac{۱}{\text{مہ}}$ اور عماد کا میلان $= -\text{مہ}$ - اِس لیے نقطہ $(\text{ا مہ}^{۲} ، \text{۲ ا مہ})$ پر کے عماد کی مساوات ہو گی

$$(\text{ما} - \text{۲ ا مہ}) = -\text{مہ}\,(\text{لا} - \text{ا مہ}^{۲}) \quad \text{یعنی} \quad \text{ما} + \text{مہ لا} = \text{۲ ا مہ} + \text{ا مہ}^{۳} ۔$$

یہ مساوات مہ میں تیسرے درجے کی ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی دیے ہوئے نقطے میں سے مکافی کے تین عماد گزرتے ہیں۔

۳- ناقص کی معیاری مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱ \qquad (\text{مان لیا جاتا ہے کہ ا} > \text{ب})$$

اِس ناقص کے تشاکل کے محور حوالے کے محور ہیں اور نصف محوروں کا طول ا اور ب ہے۔ اس ناقص کا خروج المرکز ز ہو تو $\text{ب}^{۲} = \text{ا}^{۲}(۱ - \text{ز}^{۲})$

ناقص کے دو حقیقی ماسکے ہوتے ہیں اور یہ ماسکے لا-محور پر مبداء سے فاصلوں $\pm \text{ا ز}$ پر واقع ہوتے ہیں یعنی ناقص کے ماسکوں کے محدد $(\text{ا ز} ، ۰)$ اور $(-\text{ا ز} ، ۰)$ ہیں۔ اِن ماسکوں کے جواب کے مرتبوں کی مساواتیں ترتیب وار یہ ہیں $\text{لا} = \frac{\text{ا}}{\text{ز}}$ ؛ $\text{لا} = -\frac{\text{ا}}{\text{ز}}$ ۔

اس ناقص اور لا-محور کے نقطِ تقاطع یعنی ناقص اور حقیقی ماسکوں میں سے گزرنے والے خط کے نقاط تقاطع محورِ اعظم کے سرے کہلاتے ہیں۔ ناقص اور اس کے دوسرے محورِ تشاکل کے سرے ناقص کے محورِ اصغر کے سرے کہلاتے ہیں۔

ناقص $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$ کے نقطہ $(\text{لا}_{۱} ، \text{ما}_{۱})$ پر کے مماس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا لا}_{۱}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما ما}_{۱}}{\text{ب}^{۲}} = ۱ \quad \text{اور عماد کی مساوات ہے} \quad \frac{\text{لا} - \text{لا}_{۱}}{\frac{\text{لا}_{۱}}{\text{ا}^{۲}}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_{۱}}{\frac{\text{ما}_{۱}}{\text{ب}^{۲}}}$$

خط $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ج}$ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کو مس کرتا ہے اگر $\text{ج}^2 = \text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2$ یعنی م کی ہر قیمت کے لیے خط $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2}$ ناقص کو مس کرتا ہے۔

۴۔ زائد کی معیاری مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$$

اس زائد کے تشاکل کے محور حوالے کے محور ہیں۔ زائد لا-محور کو نقاط (ا، ۰) اور (-ا، ۰) پر قطع کرتا ہے۔ ان دونوں نقطوں کو ملانے والا وقفہ (یعنی محدود خط) زائد کا **قاطع محور** کہلاتا ہے۔ نصف قاطع محور کا طول ا ہے۔ زائد کا دوسرا محور تشاکل یعنی ما-محور زائد کو خیالی نقاط (۰، خ ب) اور (۰، -خ ب) پر قطع کرتا ہے۔ یہ دوسرا محور تشاکل جو زائد کو خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے زائد کا **مزدوج محور** کہلاتا ہے۔ اگر زائد کا خروج المرکز ز ہو تو $\text{ب}^2 = \text{ا}^2(\text{ز}^2 - ۱)$۔

زائد کے دو حقیقی ماسکے ہوتے ہیں جو قاطع محور پر مبدا سے فاصلوں ± ا ز پر واقع ہیں یعنی زائد کے حقیقی ماسکوں کے محدد ہیں (ا ز، ۰) اور (-ا ز، ۰) اور ان ماسکوں کے جواب کے مرتبوں کی مساواتیں ترتیب وار حسب ذیل ہیں:-

$$\text{لا} = \frac{\text{ا}}{\text{ز}} \quad ; \quad \text{لا} = -\frac{\text{ا}}{\text{ز}}$$

زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے کسی نقطہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ پر کے مماس کی مساوات ہے $\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2} = ۱$ اور عماد کی مساوات ہے $\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}^2}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\frac{-\text{ما}_1}{\text{ب}^2}}$

خط مستقیم $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ج}$ زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کو مس کرتا ہے اگر $\text{ج}^2 = \text{ا}^2\text{م}^2 - \text{ب}^2$ یعنی م کی ہر قیمت کے لیے خط $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 - \text{ب}^2}$.

زائد کو مس کرتا ہے۔

مشقی سوالات

۱- ا (لا$_1$، ما$_1$)، ب (لا$_2$، ما$_2$) دو دیے ہوئے نقطے ہیں۔ ن (لا، ما) اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ن ا = ک × ن ب جہاں ک ایک مستقل مقدار ہے۔ ن کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۲- س$_1$ (ک، ۰) اور س$_2$ (-ک، ۰) دو ثابت نقطے ہیں۔ نقطہ ن (لا، ما) اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ن س$_1$ + ن س$_2$ = ۲ ا، جہاں ا > ک۔ نقطہ ن کے طریق کی مساوات حاصل کرو۔

اگر ک > ا اور نقطہ ن اس طرح حرکت کرے کہ ن س$_1$ اور ن س$_2$ کا فرق مساوی ہے ۲ ا کے تو ن کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۳- ا (لا$_1$، ما$_1$) اور ب (لا$_2$، ما$_2$) دو ثابت نقطے ہیں۔ ن (لا، ما) اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ن ا^2 + ن ب^2 = ک^2 جہاں ک مستقل ہے۔ ن کے طریق کی مساوات حاصل کرو۔

۴- ایک مثلث کے راسوں کے محدد (لا$_1$، ما$_1$)، (لا$_2$، ما$_2$)، (لا$_3$، ما$_3$) ہیں۔ اس مثلث کے ہندسی مرکز (یعنی وسطانیوں کے نقطہ تقاطع) کے محدد معلوم کرو۔

۵- ا (لا$_1$، ما$_1$) ایک ثابت نقطہ ہے اور خط مستقیم ا لا + ب ما + ج = ۰ پر کا کوئی نقطہ ن ہے۔ ا ن کو ایک دی ہوئی نسبت م$_1$/م$_2$ میں نقطہ ق پر تقسیم کیا گیا ہے۔ ق کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۶- ا (لا$_1$، ما$_1$) ایک ثابت نقطہ ہے اور دائرہ لا^2 + ما^2 = ا^2 پر کا کوئی نقطہ ن ہے۔ ا ن کو ایک دی ہوئی نسبت م$_1$/م$_2$ میں نقطہ ق پر تقسیم کیا گیا ہے۔ ق کے طریق کی مساوات حاصل کرو۔

۷۔ اس مخروطی کی مساوات حاصل کرو جس کا ماسکہ س (لا$_1$، ما$_1$) پر ہے، مرتب ا لا + ب ما + ج = ۰ اور خروج المرکز ز ہے۔

۸۔ اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ خط ل لا + م ما + ن = ۰، دائرہ لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ کو مس کرے۔

۹۔ ثابت کرو کہ لا^2 + ۳ لا ما + ۲ ما^2 − لا + ما − ۶ = ۰ سے خطوطِ مستقیم کا ایک جوڑا تعبیر ہوتا ہے۔ اِن خطوں کا نقطہ تقاطع اور خطوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔ نیز ان خطوں اور لا۔محور سے بننے والے مثلث کا رقبہ محسوب کرو۔ نیز ان خطوں کے درمیانی زاویوں کے ناصفوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ذیل کے دو دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ نیز بتاؤ کہ تماس داخلی ہے یا خارجی۔

لا^2 + ما^2 = ۱ ؛ لا^2 + ما^2 − ۶ لا − ۸ ما + ۹ = ۰

۱۱۔ اس دائرے کی مساوات معلوم کرو جس کا نصف قطر ا ہے اور جو لا۔محور کو مبداء پر مس کرتا ہے۔

۱۲۔ اس دائرے کی مساوات معلوم کرو جو حوالے کے دونوں محوروں کو مس کرتا ہے اور نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) میں سے گزرتا ہے۔

۱۳۔ اس دائرے کی مساوات معلوم کرو جو محور لا کو مبداء سے فاصلہ ۲ پر مس کرتا ہے اور محور ما پر طول ۶ والا مقطوعہ کاٹتا ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ خط مستقیم ۳ لا + ۴ ما − ۷ = ۰، دائرہ لا^2 + ما^2 + ۴ لا + ۶ ما − ۱۲ = ۰ کو مس کرتا ہے۔ نقطہ تماس کے محدد معلوم کرو۔

۱۵۔ مندرجۂ ذیل مخروطیوں کی نوعیت اور ان کے ضروری اجزاء معلوم کرو۔

(i) ما^2 − ۸ لا − ۲ ما − ۲۳ = ۰، (ii) ۴ لا^2 + ما^2 − ۸ لا − ۴ ما + ۴ = ۰،

(iii) ۴ لا^2 − ما^2 − ۸ لا + ۴ ما − ۴ = ۰

۱۶۔ نقطہ (۲، ۳) سے مکافی ما^2 = ۴ لا تک کھینچے ہوئے مماسات کی

مساواتیں معلوم کرو۔ نیز نقطہ تماس کے محدد معلوم کرو۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ نقطہ (۱، ۲) سے ناقص $\frac{\text{لا}^2}{4} + \frac{\text{ما}^2}{1} = 1$ تک کھینچے ہوئے مماس علی القوائم ہیں۔

۱۸۔ مکافی $\text{ما}^2 = 4\,\text{الا}$ کے نقطہ $(\text{ام}^2، ۲\,\text{ام})$ پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں حاصل کرو۔ نیز ثابت کرو کہ زیر عماد کا طول مستقل ہوتا ہے اور زیر مماس کی تنصیف راس (مبدا) پر ہوتی ہے۔

۱۹۔ $\text{ما}^2 = 4\,\text{لا}$ اور $\text{لا}^2 = 4\,\text{ما}$ کے نقاط تقاطع پر ان کے مماسوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔

۲۰۔ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے نقطہ (ا جم ط، ب جب ط) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں حاصل کرو۔ نیز زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے نقطہ (ا قط ط، ب مس ط) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں حاصل کرو۔

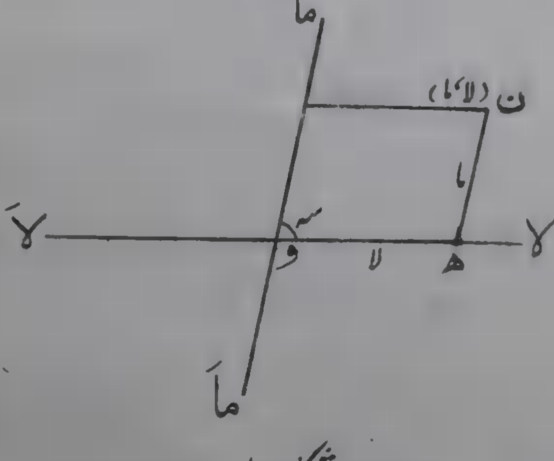
۲۱۔ اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ خط لا جم ع + ما جب ع = ع، ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کو مس کرے۔

دوسرا باب

مائل محور۔محوروں کی تبدیلی۔قطبی محدد

۱۔ نقطے۔

شکل ۲۔۱ میں محوروں لاَ و لا اور ماَ و ما کا درمیانی زاویہ سہ ہے۔
اگر ن ھ متوازی ہے وما کے اور و ھ = لا اور ھ ن = ما تو نقطہ ن کے محدد اِن محوروں کے حوالے سے (لا، ما) ہونگے۔



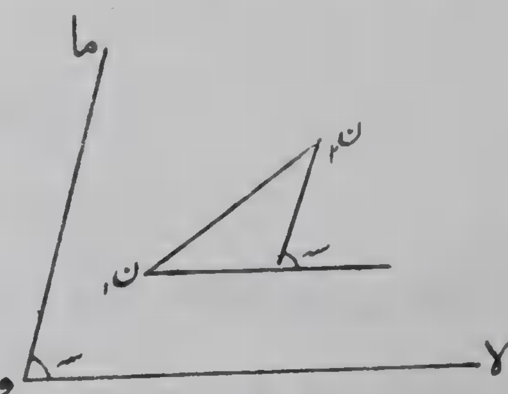
شکل ۲۔۱

(ا) دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ :-

نقاط ن۱ (لا۱، ما۱) اور ن۲ (لا۲، ما۲) کے درمیانی فاصلے کا مربع

$$= (لا_۲ - لا_۱)^۲ + (ما_۲ - ما_۱)^۲ - ۲(لا_۲ - لا_۱)(ما_۲ - ما_۱)\ جم(\pi - س)$$

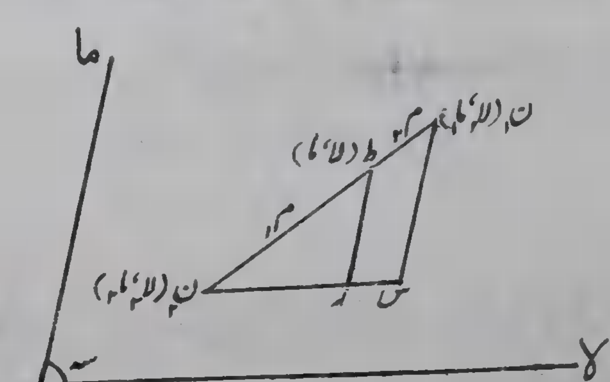
$$= (لا_۱ - لا_۲)^۲ + (ما_۱ - ما_۲)^۲ + ۲(لا_۱ - لا_۲)(ما_۱ - ما_۲)\ جم\ س$$



شکل ۲

قائم محوروں کی صورت میں $س = \frac{\pi}{۲}$ اور فاصلے کا مربع $= \Sigma (لا_۱ - لا_۲)^۲$

۲- نسبتی تقسیم



شکل ۳

وقفہ ن۲ن۱ کی تقسیم م۱ : م۲ کی نسبت میں نقطہ ط پر کی گئی ہے۔

بموجب شکل ۳ متشابہ مثلثات کے خواص سے،

ن۱ ر / ن۱ س = م۱ / (م۱ + م۲) یعنی (لا − لا۱) / (لا۲ − لا۱) = م۱ / (م۱ + م۲)

مختصر کرنے سے لا = (م۱ لا۱ + م۲ لا۲) / (م۱ + م۲) ، اسی طرح ما = (م۱ ما۱ + م۲ ما۲) / (م۱ + م۲)

داخلی تقسیم کی صورت میں م۱ اور م۲ کی ایک ہی علامت ہوگی اور خارجی تقسیم میں مختلف علامتیں ہونگی۔

۳۔ مثلث کا رقبہ

مثلث ن۱ ن۲ ن۳ کا رقبہ

= ½ جب سہ | لا۱ ما۱ ۱ ؛ لا۲ ما۲ ۱ ؛ لا۳ ما۳ ۱ | = ½ جب سہ [لا۱ (ما۲ − ما۳) + لا۲ (ما۳ − ما۱) + لا۳ (ما۱ − ما۲)]

رقبے کی علامت کے متعلق وہی قرارداد ہے جو اس سے قبل پہلے باب کے دفعہ ۱-۴ میں بیان کی گئی ہے۔

اسی طریقے سے محدب کثیر ضلعی ن۱ ن۲ ...... نر کا رقبہ

= ½ [(لا۱ ما۲ − لا۲ ما۱) + (لا۲ ما۳ − لا۳ ما۲) + ... + (لار−۱ مار − لار مار−۱) + (لار ما۱ − لا۱ مار)]

نوٹ - مائل محوروں کی صورت میں مثلث کے رقبے کے ضابطے کا ثبوت بالکل مماثل ہے اس ثبوت کے جو قائم محوروں کی صورت میں دیا جاتا ہے۔

۴۔ تین نقاط ہم خط ہونے کی شرط

نقاط ن۱، ن۲، ن۳ ہم خط ہونگے اگر Δ ن۱ ن۲ ن۳ کا رقبہ صفر ہو

یعنی

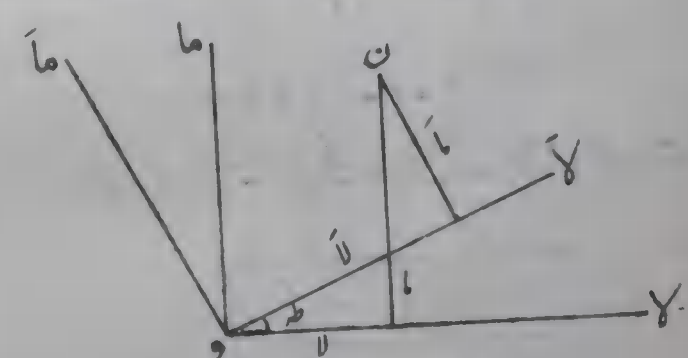
اگر $\frac{۱}{۲}$ جب سہ
$$\begin{vmatrix} ۱ & \text{ما}_۱ & \text{لا}_۱ \\ ۱ & \text{ما}_۲ & \text{لا}_۲ \\ ۱ & \text{ما}_۳ & \text{لا}_۳ \end{vmatrix} = ۰$$

∵ جب سہ ≠ ۰ اس لیے
$$\begin{vmatrix} ۱ & \text{ما}_۱ & \text{لا}_۱ \\ ۱ & \text{ما}_۲ & \text{لا}_۲ \\ ۱ & \text{ما}_۳ & \text{لا}_۳ \end{vmatrix} = ۰$$
مطلوبہ شرط ہے۔

۵۔ محوروں کی تبدیلی

(ا) مبداء کی تبدیلی:-

نقطہ ن کے محدد پرانے محوروں کے لحاظ سے (لا، ما) ہوں اور مبداء کو نقطۂ (لا۱، ما۱) پر محوروں کی سمتیں برقرار رکھ کر منتقل کیا جائے اور نقطے کے نئے محدد (لاَ، ماَ) ہوں تو شکل کی مدد سے آسانی سے تصدیق کیجا سکتی ہے کہ لا = لاَ + لا۱ اور ما = ماَ + ما۱



شکل ۴

(اا) قائم محوروں کا گھماؤ:-

مبداء کو ثابت رکھ کر محوروں کو بقدر زاویہ ط گھمایا گیا ہے۔ ن کے محدد پرانے

محوروں کے لحاظ سے (لا ، ما) اور نئے محوروں کے لحاظ سے (لاَ ، ماَ) ہیں - یعنی و ن کے اجزاء ابتدائی محوروں کے لحاظ سے (لا ، ما) اور نئے محوروں کے لحاظ سے (لاَ ، ماَ) ہیں -

لا = و ن کا ظل و لا پر = لاَ اور ماَ کے ظلوں کا مجموعہ = لاَ جم طہ + ماَ جم (۹۰° + طہ)

∴ لا = لاَ جم طہ - ماَ جب طہ (i)

اسی طرح و ن کا ظل و ما پر لینے سے ما = لاَ جب طہ + ماَ جم طہ (ii)

(i) اور (ii) سے یا و لاَ اور و ماَ پر ظل لینے سے حاصل ہوتا ہے کہ لاَ = لا جم طہ + ما جب طہ (iii)

ماَ = - لا جب طہ + ما جم طہ (iv)

نوٹ - (iii) اور (iv) ، (i) اور (ii) سے براہ راست حاصل ہو سکتے ہیں جبکہ لا ، ما اور لاَ ، ماَ کو آپس میں بدل دیں اور طہ کے بجائے (- طہ) درج کریں -

اگر مبداء کو نقطہ (لا۱ ، ما۱) پر منتقل کر کے محوروں کو زاویہ طہ میں سے گھمایا جائے تو

لا = لا۱ + لاَ جم طہ - ماَ جب طہ

ما = ما۱ + لاَ جب طہ + ماَ جم طہ

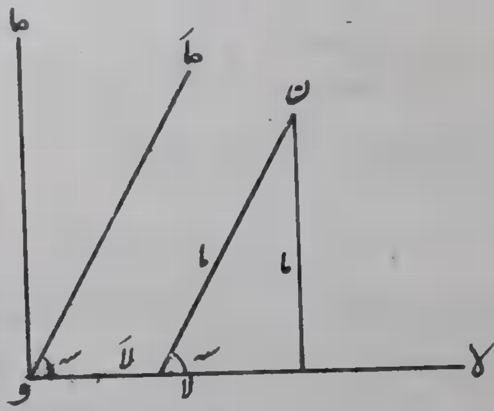
اوپر کے تمام رشتے ذیل کی جدول سے حاصل کیے جا سکتے ہیں :-

	لاَ	ماَ
لا	جم طہ	- جب طہ
ما	جب طہ	جم طہ

نوٹ - ان تحویلی ضابطوں سے یہ بھی ظاہر ہے کہ محوروں کی کسی تبدیلی سے کسی مساوات کے درجے میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی ہے -

(iii) مائل محوروں سے قائم محوروں میں تبدیلی جبکہ دونوں میں لا - محور مشترک ہو۔

قائم محوروں کے لحاظ سے ن کے محدد (لا، ما) اور مائل محوروں کے لحاظ سے (لاَ، ماَ) ہیں۔



شکل ۵ سے

لاَ = لا - ما مم سہ

ماَ = ما قم سہ

ان سے حاصل ہوتا ہے

لا = لاَ + ماَ جم سہ

ما = ماَ جب سہ

شکل ۵

(iv) مبداء کو بدلنے کے بغیر مائل محوروں کے ایک نظام سے دوسرے میں بدلنا۔



ولا اور وما کا درمیانی زاویہ سہ اور ولاَ، وماَ کا درمیانی زاویہ سہَ ہے۔ فرض کرو کہ ولاَ اور وماَ ترتیب وار ولا سے زاویہ عہ اور بہ بناتے ہیں۔ وم اور م ن کے ظلوں کا مجموعہ کسی خط پر ومَ اور مَ ن کے ظلوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے ولا پر علی القوائم کھینچے ہوئے خط پر

شکل ۶

ظل لینے سے حاصل ہوتا ہے ماجب سہ = لاَجب عہ + ماَجب (عہ + سہَ)

$$\therefore \text{ما} = \frac{\text{لاَجب عہ}}{\text{جب سہ}} + \frac{\text{ماَجب بہ}}{\text{جب سہ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

و ما پر علی القوائم کھینچے ہوئے خط پر ظل لینے سے

لاجب سہ = لاَجب (سہ - عہ) + ماَجب (سہ - بہ)

$$\therefore \text{لا} = \frac{\text{لاَجب (سہ - عہ)}}{\text{جب سہ}} + \frac{\text{ماَجب (سہ - بہ)}}{\text{جب سہ}} \quad \ldots\ldots (ii)$$

ان ضابطوں سے ظاہر ہے کہ

لا = ک لاَ + ل ماَ

اور ما = کَ لاَ + لَ ماَ

جہاں ک، ل، کَ، لَ زاویوں سہ، سہَ اور عہ، بہ پر منحصر ہیں۔ غور سے دیکھا جائے کہ یہ تحویلی ضابطے خطی اور متجانس ہیں۔ یہ یاد رکھنا کافی ہے کہ اگر مبداء کو ثابت رکھ کر محوروں کی سمتوں کو بدلا جائے تو تحویلی ضابطے خطی اور متجانس ہوتے ہیں۔

اوپر کے ضابطوں میں سہ = ۹۰° تو قائم محوروں سے مائل محوروں میں تبدیلی اور سہَ = ۹۰° تو مائل محوروں سے قائم محوروں میں تبدیلی کے لیے ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔

۶- غیر متغیرات —

اگر محوروں کی کسی قسم کی تبدیلی سے جب کہ مبداء کو نہ بدلا جائے جملہ ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما²، جملہ اَ لاَ² + ۲ ھَ لاَ ماَ + بَ ماَ² میں بدل جائے تو

$$\frac{\text{اَ + بَ - ۲ ھَ جم سہَ}}{\text{جب}^2\text{ سہَ}} = \frac{\text{ا + ب - ۲ ھ جم سہ}}{\text{جب}^2\text{ سہ}} \quad \ldots\ldots\ldots (i)$$

اور

$$\frac{\text{اَبَ - ھَ}^2}{\text{جب}^2\text{ سہَ}} = \frac{\text{اب - ھ}^2}{\text{جب}^2\text{ سہ}} \quad \ldots\ldots\ldots (ii)$$

جہاں سہ اور سہَ دونوں نظاموں میں محوروں کے درمیانی زاویے ہیں۔

جملہ لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا ما جم سہ = لاَ^۲ + ماَ^۲ + ۲ لاَ ماَ جم سہَ (یہ جملے مبداء سے نقطے کے فاصلے کے مربعوں کو تعبیر کرتے ہیں)

اس لیے ا لا^۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما^۲ + لہ (لا^۲ + ما^۲ + ۲ لا ما جم سہ)

= اَ لاَ^۲ + ۲ ھَ لاَ ماَ + بَ ماَ^۲ + لہ (لاَ^۲ + ۲ لاَ ماَ جم سہَ + ماَ^۲)

یہ رشتہ لہ کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔ اگر لہ کو اس طرح لیا جائے کہ دائیں جانب کا جملہ کامل مربع ہو یعنی (ف لا + ق ما)^۲ کی شکل کا ہو تو چونکہ

لا = ک لاَ + ل ماَ اور ما = کَ لاَ + لَ ماَ،

∴ (ف لا + ق ما)^۲ = {ف (ک لاَ + ل ماَ) + ق (کَ لاَ + لَ ماَ)}^۲

= (فَ لاَ + قَ ماَ)^۲

پس لہ کی جو قیمت دائیں طرف کے جملے کو کامل مربع بناتی ہے وہی قیمت بائیں طرف کے جملے کو بھی کامل مربع بناتی ہے۔

دائیں طرف کا جملہ کامل مربع ہوگا جبکہ (ا + لہ)(ب + لہ) = (ھ + لہ جم سہ)^۲

یعنی لہ^۲ جب^۲ سہ + لہ (ا + ب − ۲ ھ جم سہ) + اب − ھ^۲ = ۰ ... (ا)

اسی طرح بائیں طرف کا جملہ کامل مربع ہوگا اگر

لہ^۲ جب^۲ سہَ + لہ (اَ + بَ − ۲ ھَ جم سہَ) + اَبَ − ھَ^۲ = ۰ ... (ب)

لہ کی ایک ہی قیمت اِن دونوں مساواتوں (ا)، (ب) کو پورا کرتی ہے۔

∴ (ا + ب − ۲ ھ جم سہ) / جب^۲ سہ = (اَ + بَ − ۲ ھَ جم سہَ) / جب^۲ سہَ ؛ (اب − ھ^۲) / جب^۲ سہ = (اَبَ − ھَ^۲) / جب^۲ سہَ

نوٹ - اگر محوروں کے دونوں نظام علی القوائم ہوں تو

ا + ب = اَ + بَ اور اب - ھ^{2} = اَبَ - ھَ^{2}

چونکہ $\frac{\text{ا + ب - ۲ھ جم سہ}}{\text{جب}^{2}\text{ سہ}}$ اور $\frac{\text{اب - ھ}^{2}}{\text{جب}^{2}\text{ سہ}}$ محوروں کو بدلنے سے اپنے متناظر جملوں کے مساوی رہتے ہیں یعنی محوروں کے بدلنے سے اِن کی قیمتیں نہیں بدلتیں اس لیے اِن کو **غیر متغیرات** کہتے ہیں۔

۷۔ 'لاما' والی رقم کو نکالنا

قائم محوروں کے ایک نظام کے لحاظ سے کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) ہوں تو مبدا کو ثابت رکھ کر محوروں کو اس طرح گھمایا جاسکتا ہے کہ ا لا^{2} + ۲ھ لاما + ب ما^{2}، بدل کر اَ لاَ^{2} + بَ ماَ^{2} ہوجائے جہاں اسی نقطہ کے محدد نئے نظام کے لحاظ سے (لاَ، ماَ) ہیں۔

ابتدائی محوروں کو زاویۂ طہ میں گھمانے سے نئے محور حاصل ہوں تو

لا = لاَ جم طہ - ماَ جب طہ ؛

ما = لاَ جب طہ + ماَ جم طہ

∴ ا لا^{2} + ۲ھ لاما + ب ما^{2} = ا (لاَ جم طہ - ماَ جب طہ)^{2}

+ ۲ھ (لاَ جم طہ - ماَ جب طہ) (لاَ جب طہ + ماَ جم طہ) + ب (لاَ جب طہ + ماَ جم طہ)^{2}

لاَماَ کا سر = - ۲ {(ا - ب) جب طہ جم طہ - ھ (جم^{2} طہ - جب^{2} طہ)}؛ یہ صفر ہوگا جبکہ

$\frac{1}{2}$ (ا - ب) جب ۲ طہ = ھ جم ۲ طہ یعنی مس ۲ طہ = $\frac{\text{۲ھ}}{\text{ا - ب}}$

یہ مساوات طہ کی حقیقی قیمت سے پوری ہوتی ہے اور

۲ ط = ن π + مس$^{-1}$ $\frac{۲ ھ}{ا - ب}$

خاص صورت میں جبکہ اب - ھ^۲ = ۰ ہو تو اَ = ۰ یا بَ = ۰، کیونکہ

غیر متغیرات سے اب - ھ^۲ = اَبَ = ۰

۸۔ مائل محوروں کی صورت میں خطوط کا درمیانی زاویہ۔

(ا) محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہو تو اس خط کی مساوات معلوم کرو جو لا۔محور سے زاویہ ط بناتا ہے اور ما۔محور پر طول ج والا مقطوعہ کاٹتا ہے۔

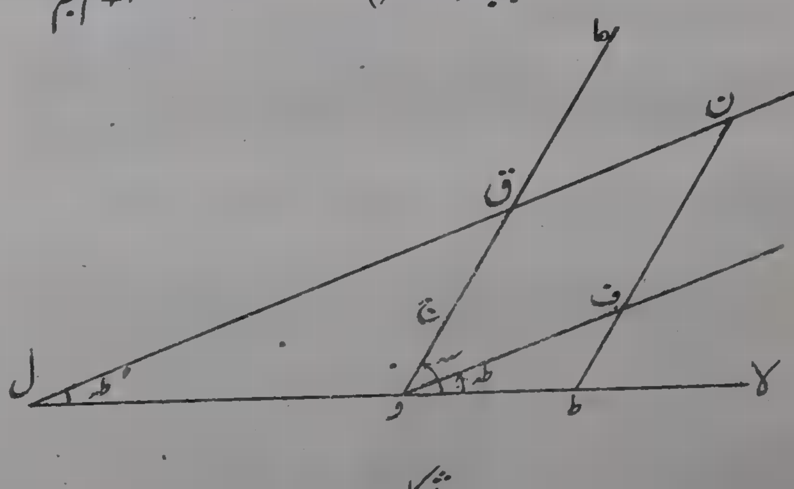
فرض کرو کہ م = $\frac{\text{ف ط}}{\text{و ط}}$ = $\frac{\text{جب ط}}{\text{جب (سہ - ط)}}$

تب، بموجب شکل ۷، ما = ط ف + ف ن

= م × و ط + و ق

= م لا + ج .... (ا)

چونکہ م = $\frac{\text{جب ط}}{\text{جب (سہ - ط)}}$، ∴ مس ط = $\frac{\text{م جب سہ}}{\text{۱ + م جم سہ}}$



شکل ۷

نوٹ ۔ مائل محوروں کی صورت میں بھی $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ج}$ میں م کو برقرار رکھ کر ج کو بدلنے سے متوازی خط حاصل ہوتے ہیں۔

(ii) دو خطوط کا درمیانی زاویہ جبکہ ان کی مساواتیں مائل محوروں کے لحاظ سے معلوم ہیں۔

فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{م}_1\,\text{لا} + \text{ج}_1$ اور $\text{ما} = \text{م}_2\,\text{لا} + \text{ج}_2$ خطوط کی مساواتیں ہیں۔

ان کے میلان لا۔محور سے ترتیب وار طہ_1 اور طہ_2 ہیں۔

$$\therefore \text{مس}\ \text{طہ}_1 = \frac{\text{م}_1\ \text{جب}\ \text{سہ}}{1 + \text{م}_1\ \text{جم}\ \text{سہ}} \quad \text{اور} \quad \text{مس}\ \text{طہ}_2 = \frac{\text{م}_2\ \text{جب}\ \text{سہ}}{1 + \text{م}_2\ \text{جم}\ \text{سہ}}$$

مطلوبہ زاویہ فہ ہو تو، $\text{فہ} = \text{طہ}_1 - \text{طہ}_2$

$$\therefore \text{مس}\ \text{فہ} = \text{مس}\,(\text{طہ}_1 - \text{طہ}_2) = \frac{(\text{م}_1 - \text{م}_2)\ \text{جب}\ \text{سہ}}{1 + (\text{م}_1 + \text{م}_2)\ \text{جم}\ \text{سہ} + \text{م}_1\text{م}_2}$$

خطوط علی القوائم ہونگے اگر $1 + (\text{م}_1 + \text{م}_2)\ \text{جم}\ \text{سہ} + \text{م}_1\text{م}_2 = 0$،

اور متوازی جبکہ $\text{م}_1 = \text{م}_2$

نوٹ ۔ اگر خطوط $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = 0$، $\text{اَ}\,\text{لا} + \text{بَ}\,\text{ما} + \text{جَ} = 0$ ہوں اور درمیانی زاویہ فہ ہو تو

$\text{م} = -\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ اور $\text{مَ} = -\frac{\text{اَ}}{\text{بَ}}$ ∴ مس فہ میں یہ قیمتیں درج کرنے سے

$$\text{مس}\ \text{فہ} = \frac{(\text{اَ}\text{ب} - \text{ا}\text{بَ})\ \text{جب}\ \text{سہ}}{\text{ا}\text{اَ} + \text{ب}\text{بَ} - (\text{ا}\text{بَ} + \text{ب}\text{اَ})\ \text{جم}\ \text{سہ}}$$

خطوط علی القوائم ہونگے اگر $\text{ا}\text{اَ} + \text{ب}\text{بَ} - (\text{ا}\text{بَ} + \text{ب}\text{اَ})\ \text{جم}\ \text{سہ} = 0$

پس $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = 0$ کے علی القوائم کسی خط کی مساوات ہوگی

(ب ـ اجم سہ) لا ـ (ا ـ ب جم سہ) ما = م، جہاں م کوئی مستقل ہے۔
مثال کے طور پر لا + ما جم سہ = ۰ اور ما + لا جم سہ = ۰ ترتیب وار ما = ۰ اور لا = ۰ پر علی القوائم ہیں۔

(iii) محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہو تو خطوط الا² + ۲ ھ لاما + ب ما² = ۰ کا درمیانی زاویہ معلوم کرو۔

غیر متغیرات کی مدد سے مبداء کو قائم رکھ کر قائم محوروں میں تحویل کرنے سے جملہ الا² + ۲ ھ لاما + ب ما² جملہ اَ لاَ² + ۲ ھَ لاَ ماَ + بَ ماَ² میں تبدیل ہو جاتا ہے۔ اس لیے درمیانی زاویہ فہ ہو تو مس فہ = ۲ √(ھَ² ـ اَبَ) / (اَ ـ بَ)

مگر (ھ² ـ اب) / جب² سہ = (ھَ² ـ اَبَ) / جب² π/۲ = ھَ² ـ اَبَ

اور (ا + ب ـ ۲ ھ جم سہ) / جب² سہ = (اَ + بَ ـ ۲ ھَ جم π/۲) / جب² π/۲ = اَ + بَ

∴ مس فہ = ۲ جب سہ √(ھ² ـ اب) / (ا + ب ـ ۲ ھ جم سہ)

خطوط علی القوائم ہونگے اگر ا + ب ـ ۲ ھ جم سہ = صفر

۹۔ عمود کا طول ــــ

نقطہ ن، (لا، ما،) سے خط الا + ب ما + ج = ۰ پر عمود کا طول معلوم کرو جبکہ محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہو۔ مبداء کو ثابت رکھ کر قائم محوروں میں مساوات کو بدلو۔ قائم محوروں کے حوالے سے نقطہ ن، کے محدد (لاَ، ماَ،) ہوں تو

تحویلی ضابطوں لا = لاَ - ماَ مم سہ ، ما = ماَ قم سہ کی رو سے

$$\text{لا}_1 = \text{لاَ}_1 - \text{ماَ}_1 \,\text{مم سہ} ،\quad \text{ما}_1 = \text{ماَ}_1 \,\text{قم سہ}$$

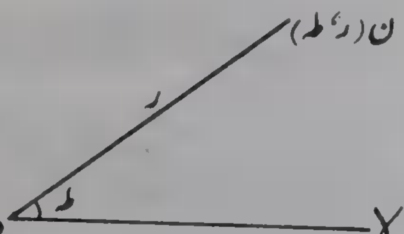
اور دیے ہوئے خط کی مساوات قائم محوروں کے حوالے سے ہوگی

$$\text{ا}\,(\text{لاَ} - \text{ماَ مم سہ}) + \text{ب ماَ قم سہ} + \text{ج} = 0$$

اس خط پر (لاَ۱ ، ماَ۱) سے نکالے ہوئے عمود کا طول

$$= \frac{\text{ا}\,(\text{لاَ}_1 - \text{ماَ}_1\,\text{مم سہ}) + \text{ب ماَ}_1\,\text{قم سہ} + \text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2 + (\text{ب قم سہ} - \text{ا مم سہ})^2}} = \frac{(\text{ا لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ج})\,\text{جب سہ}}{\sqrt{\text{ا}^2 - 2\,\text{اب جم سہ} + \text{ب}^2}}$$

۱۰ - قطبی محدد ——



شکل ۸

شکل ۸ میں و ثابت نقطہ ہے جس کو قطب کہتے ہیں۔ ثابت خط ولا کو ابتدائی خط کہتے ہیں۔ فاصلہ ون = رسمتی نیم قطر اور زاویہ طہ سمتی زاویہ کہلاتا ہے۔ (ر، طہ) کو نقطہ ن کے قطبی محدد کہتے ہیں۔

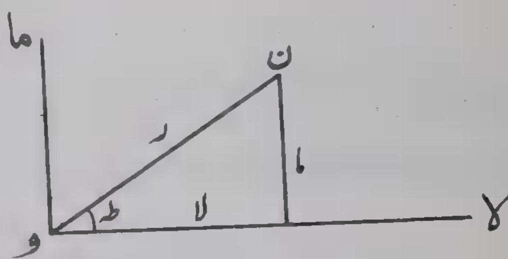
نوٹ۔ سمتی زاویہ میں π یا π کا کوئی طاق ضعف ملادینے اور سمتی نیم قطر کی علامت بدلنے سے وہی نقطہ حاصل ہوتا ہے۔ مثلاً (ر، طہ)، (-ر، طہ + π) اور [-ر، طہ + (۲م + ۱) π] ایک ہی نقطے کے محدد ہیں۔

(۱) قطبی اور کارتیزی محددوں میں رشتہ ——

(ا) قائم محوروں کی صورت میں بموجب شکل ۹

$$\text{لا} = \text{ر جم طہ} ،\quad \text{ما} = \text{ر جب طہ}$$

$$\therefore\ \text{ر}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 ،\quad \text{مس طہ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$



شکل ۹

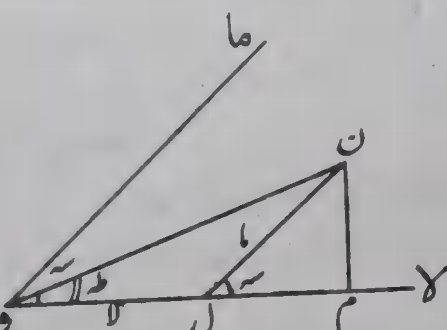
(ii) اگر محور مائل ہوں تو

بموجب شکل ۱۰

ر جم طہ = ول + ل م = لا + ما جم سہ

ر جب طہ = م ن = ما جب سہ

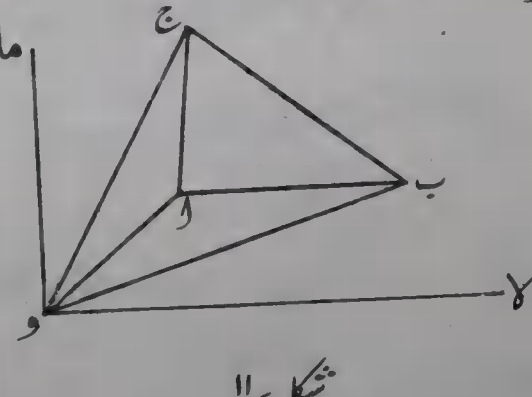
مربع لینے سے ر² = لا² + ما² + ۲ لا ما جم سہ



شکل ۱۰

(۲) مثلث کا رقبہ ۔

بموجب شکل ۱۱ و، ب، ج کے قطبی محدد (ر۱، طہ۱)، (ر۲، طہ۲)، (ر۳، طہ۳) ہیں۔



شکل ۱۱

△ ا ب ج = △ و ب ج - △ و ب ا - △ و ا ج

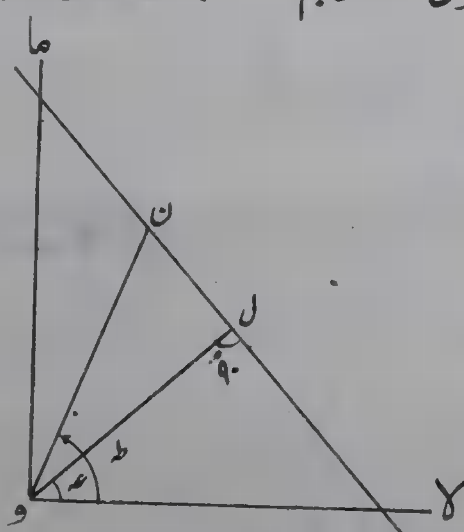
= ½ ر٢ ر٣ جب (طہ٣ - طہ٢) - ½ ر١ ر٢ جب (طہ٢ - طہ١) - ½ ر١ ر٣ جب (طہ٣ - طہ١)

= ½ [ر٢ ر٣ جب (طہ٣ - طہ٢) + ر٢ ر١ جب (طہ١ - طہ٢) + ر١ ر٣ جب (طہ١ - طہ٣)]

(۳) خط کی مساوات۔

(i) مساوات لا جم عہ + ما جب عہ = ع میں لا = ر جم طہ، ما = ر جب طہ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ ر جم (طہ - عہ) = ع جو قطبی محدد میں خط کی معیاری مساوات ہے۔ یہ مساوات شکل ۱۲ کی مدد سے براہِ راست آسانی سے حاصل کیجا سکتی ہے۔

∵ ول = ون جم (طہ - عہ) اس لیے ع = ر جم (طہ - عہ)۔



شکل ۱۲

(ii) خط کی عام مساوات کارتیزی محددوں میں ا لا + ب ما = ک ہے۔ لا = ر جم طہ، ما = ر جب طہ رکھنے سے مبداء میں سے نہ گزرنے والے کسی خط کی قطبی مساوات ا جم طہ + ب جب طہ = ک/ر حاصل ہوتی ہے جہاں ک کوئی

مستقل ہے۔

مبداء میں سے گزرنے والے کسی خط کی مساوات ہے طہ = م جہاں م مستقل ہے۔

(iii) **متوازی خطوط**۔ ظاہر ہے کہ ع = رجم (طہ ۔ عہ)، عَ = رجم (طہ ۔ عہ) متوازی خطوط ہیں کیونکہ دونوں صورتوں میں مبداء سے خطوں پر کے عمودوں کے میلان مساوی ہیں۔

اسی طرح خطوط اجم طہ + ب جب طہ = ک/ر ، اجم طہ + ب جب طہ = کَ/ر متوازی ہیں۔

(iv) **علی القوائم خطوط**۔ خطوط ع = رجم (طہ ۔ عہ)، عَ = رجم (طہ ۔ عہَ) علی القوائم ہونگے اگر عہَ ۔ عہ = $\frac{\pi}{۲}$

یعنی ع = رجم (طہ ۔ عہ)، عَ = رجم (طہ ۔ $\frac{\pi}{۲}$ ۔ عہ) دو علی القوائم خطوط ہیں۔

اسی طرح اجم طہ + ب جب طہ = ک/ر ، ب جم طہ ۔ اجب طہ = کَ/ر علی القوائم خطوط ہیں۔

پس اجم طہ + ب جب طہ = ک/ر کے علی القوائم کسی خط کی عام مساوات حاصل کرنے کے لیے طہ کے بجائے ($\frac{\pi}{۲}$ + طہ) درج کرو اور مستقل ک کو بدلو۔

مشقی سوالات

۱۔ ذیل کی مساواتوں کو قطبی محددوں میں تبدیل کرو:۔

(i) (لا^{۲} + ما^{۲})^{۲} = ا^{۲} (لا^{۲} ـ ما^{۲}) (ii) لا^{۲} ـ ما^{۲} = ۲ ا ما

(iii) لا^{۲} + ما^{۲} = ۲ ا لا

۲- کارتیزی محددوں میں تبدیل کرو۔

(i) $ر^{2} = ا^{2}$ جم ۲ طہ　(ii) $ر^{\frac{1}{2}}$ جم $\frac{طہ}{۲}$ = $ا^{\frac{1}{2}}$

(iii) $ر^{2}$ جب ۲ طہ = ۲ $و^{2}$　(iv) ر = ا جم طہ

۳- ثابت کرو کہ نقاط ($ر_1$، $طہ_1$)، ($ر_2$، $طہ_2$) میں سے گزرنے والے خط کی مساوات

ر $ر_1$ جب (طہ - $طہ_1$) + $ر_1$ $ر_2$ جب ($طہ_1$ - $طہ_2$) + $ر_2$ ر جب ($طہ_2$ - طہ) = ۰

ہے۔

۴- ر جم (طہ - ۴۵°) = ۲، ر جم (طہ - ۱۳۵°) = ۲ کے نقطہ تقاطع کے محدد معلوم کرو۔

۵- مبدا کو نقطہ (۲، ۲) پر منتقل کیا جائے اور پرانے محوروں کو جو قائم ہیں زاویہ ۴۵° میں پھرا دیا جائے تو بتاؤ کہ نئے محوروں کے لحاظ سے مساوات ۳ $لا^{2}$ + ۲ لا ما + ۳ $ما^{2}$ - ۱۸ لا - ۲۲ ما + ۵۰ = ۰ ہو جائیگی

۴ $لا^{2}$ + ۲ $ما^{2}$ = ۱ ۔

۶- خطوط $لا^{2}$ + لا ما - $ما^{2}$ + ۵ لا - ۵ = ۰ کے درمیان جو زاویے بنتے ہیں ان کو تنصیف کرنے والے خطوط کی مشترک مساوات حاصل کرو۔ عام طور پر ثابت کرو کہ س = ۰ دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے تو ان کے درمیانی زاویوں کے منصفوں کی مشترک مساوات

$\frac{(لا - لاَ)^{2} - (ما - ماَ)^{2}}{ا - ب} = \frac{(لا - لاَ)(ما - ماَ)}{ھ}$ ہے

جہاں لاَ، ماَ خطوط کے نقطہ تقاطع کے محدد ہیں۔ مان لیا جائے کہ محور قائم ہیں)۔

۷- ثابت کرو کہ ا لا + ب ما + ج = ۰ اور (ا لا + ب ما$)^{2}$ - ۳ (ب لا - ا ما$)^{2}$ = ۰ سے مثلث مساوی الاضلاع

بنتا ہے۔

(اشارہ۔ ولا + ب ما = ۰ کو محور لا' ب لا ـ و ما = ۰ کو محور ما لیا جائے)

۸۔ اگر (لا، ما) اور (لاَ، ماَ) ایک ہی نقطے کے محدد دو علی القوائم محوروں کے نظاموں کے لحاظ سے ہوں جن کا مبدا ایک ہی ہے اور اگر درجۂ اول کا جملہ ع لا + و ما بدل کر عَ لاَ + وَ ماَ ہو جائے تو ثابت کرو کہ $ع^{2} + و^{2} = عَ^{2} + وَ^{2}$ ۔

تیسرا باب

درجۂ دوم کی عام مساوات

١ - درجۂ دوم کی ترسیم کی نوعیت —

پہلے باب کے دفعۂ ۴ میں ہم یہ دیکھ چکے ہیں کہ قائم محدودوں کے حوالے سے ہر مخروطی تراش کی کارٹیزی مساوات درجۂ دوم کی ہوتی ہے۔ اب ہم ثابت کرینگے کہ خواہ محور قائم ہوں یا مائل درجہ دوم کی ہر کارٹیزی مساوات ایک مخروطی تراش کو تعبیر کرتی ہے۔

درجہ دوم کی عام مساوات ہے

$$و\,لا^{2} + ٢\,ھ\,لا\,ما + ب\,ما^{2} + ٢\,گ\,لا + ٢\,ف\,ما + ج = ٠$$

(١) فرض کرو کہ حوالے کے محور قائم ہیں۔

حوالے کے محوروں کو ایسے زاویہ ط میں سے گھماؤ کہ نئی مساوات میں لاَ ماَ والی رقم موجود نہ ہو [دوسرا باب دفعہ ۸]

فرض کرو کہ نئے محوروں کے حوالے سے ترسیم کی مساوات ہے

$$وَ\,لاَ^{2} + بَ\,ماَ^{2} + ٢\,گَ\,لاَ + ٢\,فَ\,ماَ + ج = ٠$$

پس $$و\,لا^{2} + ٢\,ھ\,لا\,ما + ب\,ما^{2} = وَ\,لاَ^{2} + بَ\,ماَ^{2}$$

تب دوسرے باب کے دفعہ ۶ کی رو سے

ا + ب = اَ + بَ اور اب ۔ ھ² = اَ بَ

(i) اگر اب ۔ ھ² = ۰ ، تو اَ بَ = ۰ ، یعنی اَ اور بَ میں سے ایک مقدار صفر ہے ۔ [اَ اور بَ دونوں صفر نہیں ہو سکتے کیونکہ اس صورت میں نئی مساوات درجہ اول کی ہوگی جو ناممکن ہے] ۔

اگر اَ = ۰ تو نئی مساوات ہوگی بَ مَا² + ۲گَ لاَ + ۲فَ مَا + ج = ۰

اس مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ ترسیم ایک مکافی ہے جس کا محور تشاکل لا۔محور کے متوازی ہے ۔

اگر بَ = ۰ تو اس طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ترسیم ایک مکافی ہے جس کا محور تشاکل ما۔محور کے متوازی ہے ۔

پس ثابت ہوا کہ ترسیم مکافی ہے جبکہ اَ بَ = ۰ یعنی جبکہ اب ۔ ھ² = ۰ ۔

(ii) اگر اب ۔ ھ² ≠ ۰ تو اَ اور بَ دونوں صفر سے مختلف ہونگے اور ترسیم کی نئی مساوات ذیل کی شکل میں لکھی جائیگی ۔

اَ (لاَ + گَ/اَ)² + بَ (مَا + فَ/بَ)² = گَ²/اَ + فَ²/بَ ۔ ج

یہ مساوات ایک مرکزدار مخروطی (یعنی ناقص یا زائد) کو تعبیر کرتی ہے جس کا مرکز نقطہ (۔ گَ/اَ ، ۔ فَ/بَ) پر ہے اور جس کے تشاکل کے محور حوالے کے محوروں کے متوازی ہیں ۔ یہ مرکزدار مخروطی ناقص ہے اگر اَ اور بَ کی علامت ایک ہی ہے اور زائد ہے اگر اَ اور بَ کی علامتیں مختلف ہیں ۔

اگر اَ اور بَ کی ایک ہی علامت ہو تو اَ بَ مثبت مقدار ہوگی اور اگر اَ اور بَ کی علامتیں مختلف ہوں تو اَ بَ منفی مقدار ہوگی یعنی اَ اور بَ کی ایک ہی علامت ہوگی یا علامتیں مختلف ہونگی بموجب اس کے کہ (اب ۔ ھ²) مثبت ہے یا منفی ۔

پس ثابت ہوا کہ ترسیم ناقص ہے اگر $(اب - ھ^2) > ۰$ اور زائد ہے اگر $(اب - ھ^2) < ۰$

(ب) اب فرض کرو کہ حوالے کے محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہے۔ اگر مبداء کو برقرار رکھ کر محوروں کو قائم بنایا جائے تو دی ہوئی ترسیم کی مساوات ہو جائیگی۔

$$اَ لاَ^2 + ۲ ھَ لاَ مَاَ + بَ مَاَ^2 + ۲ گَ لاَ + ۲ فَ مَاَ + ج = ۰$$

اس مساوات سے (i) **مکافی** تعبیر ہوگا اگر $اَبَ - ھَ^2 = ۰$

(ii) **ناقص** تعبیر ہوگا اگر $اَبَ - ھَ^2 > ۰$

اور (iii) **زائد** تعبیر ہوگا اگر $اَبَ - ھَ^2 < ۰$

لیکن (دوسرے باب کے دفعہ ۶ کی رو سے)

$$\frac{اب - ھ^2}{جب^2 سہ} = \frac{اَبَ - ھَ^2}{جب^2 \frac{\pi}{2}} = اَبَ - ھَ^2$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ $اَبَ - ھَ^2 \gtreqless ۰$ بموجب اس کے کہ $اب - ھ^2 \gtreqless ۰$

پس ثابت ہوا کہ خواہ محور قائم ہوں یا مائل درجہ دوم کی مساوات

$$ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$$ سے

تعبیر ہونے والی ترسیم (۱) **مکافی** ہے اگر $اب - ھ^2 = ۰$

(۲) **ناقص** ہے اگر $اب - ھ^2 > ۰$

(۳) **زائد** ہے اگر $اب - ھ^2 < ۰$

نوٹ (۱) ترسیم (i) مکافی ہے جبکہ $ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2$ کامل مربع ہو

(ii) ناقص ہے جبکہ ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 دو کامل مربعوں کا مجموعہ ہو

اور (iii) زائد ہے جبکہ ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 دو مربعوں کا فرق ہو۔

نوٹ (۲) درجہ دوم کی عام مساوات خطوط مستقیم کے جوڑے کو تعبیر کرتی ہے اگر

$$\begin{vmatrix} \text{گ} & \text{ھ} & \text{ا} \\ \text{ف} & \text{ب} & \text{ھ} \\ \text{ج} & \text{ف} & \text{گ} \end{vmatrix} = 0$$

اگر خطوط کے جوڑے کی شرط پوری ہو اور اب - ھ^2 = ۰ تو خطوط متوازی یا منطبق ہونگے۔

اگر خطوط کے جوڑے کی شرط پوری ہو اور اب - ھ^2 < ۰ تو متقاطع خط حاصل ہونگے۔

اگر خطوط کے جوڑے کی شرط پوری ہو اور اب - ھ^2 > ۰ تو خیالی خطوط کا جوڑا حاصل ہوگا۔

نوٹ (۳) اگر دائرے کی شرط پوری ہو [یعنی اگر ا = ب اور ھ = ۰ جبکہ محور قائم ہوں اور ا = ب اور ھ = ا جم سہ جبکہ محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہو (ثبوت کے لیے دیکھو چوتھا باب)] تو اب - ھ^2 > ۰ یعنی ناقص کی شرط بھی پوری ہوگی۔ پس معلوم ہوا کہ ناقص کی ایک خاص صورت دائرہ ہے۔

نوٹ (۴) اگر محور قائم ہوں تو مساوات لا^2 + ما^2 = ۰ سے ایک دائرہ تعبیر ہوتا ہے جس کا مرکز مبداء ہے اور نصف قطر صفر ہے۔ ایسا دائرہ نقطہ دائرہ کہلاتا ہے۔ لیکن یہ مساوات خیالی خطوط کے جوڑے کی شرط کو بھی پورا کرتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ نقطہ دائرہ کو خیالی خطوط کا جوڑا بھی تصور کیا جا سکتا ہے۔ ان خیالی خطوط کا نقطہ تقاطع، جو دائرے کا مرکز ہے، حقیقی ہے۔

۲- اختصار کی غرض سے لا، ما میں درجہ دوم کے عام جملے کو یعنی ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج کو س سے تعبیر کیا جائیگا۔ اس مختصر ترقیم کے مطابق درجہ دوم کی عام مساوات س = ۰ ہوگی۔

س۱ سے مراد وہ جملہ ہے جو س میں لا کی بجائے لا۱ اور ما کی بجائے ما۱ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

نیز م۱ سے جملہ

ا لالا۱ + ھ (لاما۱ + لا۱ما) + ب ماما۱ + گ (لا + لا۱) + ف (ما + ما۱) + ج

تعبیر کیا جائیگا۔ رقموں کو ترتیب دینے سے حاصل ہوتا ہے کہ

م۱ = لا (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ) + ما (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف) + (گ لا۱ + ف ما۱ + ج)

م۱۱ سے مراد وہ جملہ ہے جو م۱ میں لا، ما کی بجائے لا۱، ما۱ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

پس م۱۱ = س۱

۳۔ مخروطی س = ۰ اور خط مستقیم کے نقاط تقاطع

نقطہ (لا۱، ما۱) میں سے گزرنے والے کسی خط کی مساوات ہوگی

(لا − لا۱) / ل = (ما − ما۱) / م = ر . . . . (۱)

جہاں ل، م ایسے مستقل ہیں جو خط کی سمت پر منحصر ہیں اور ر تعبیر کرتا ہے (لا۱، ما۱) سے (لا، ما) کے فاصلے کو جبکہ فاصلے کی علامت کو بھی ملحوظ رکھا جائے۔

اگر مذکورہ بالا خط پر کا کوئی نقطہ

ن (لا، ما) ہو تو　لا = لا۱ + رل ، ما = ما۱ + رم

اگر لا، ما کی ان قیمتوں کو مخروطی کی مساوات میں درج کیا جائے تو ر میں درجہ دوم کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جس سے اس خط اور مخروطی کے نقاط تقاطع کے فاصلے نقطہ (لا۱، ما۱) سے حاصل ہوتے ہیں۔

یہ مساوات ہے

ا (لا، + رل)² + ۲ ھ (لا، + رل) (ما، + رم) + ب (ما، + رم)²

+ ۲ گ (لا، + رل) + ۲ ف (ما، + رم) + ج = ۰

یعنی ر² [ال² + ۲ ھ ل م + ب م²] + ۲ ر [(ا لا، + ھ ما، + گ) ل

+ (ھ لا، + ب ما، + ف) م] + س، = ۰ ------ (۲)

نوٹ ۔ خط (۱) مخروطی کو مس کریگا اگر مساوات (۲) کی دونوں اصلیں مساوی ہوں۔

۴ ۔ اب فرض کرو کہ اوپر کی مساوات (۲) میں نقطہ (لا، ما،) مخروطی س = ۰ پر ہے ۔ یعنی س، = ۰ تب مساوات (۲) کی ایک اصل صفر ہوگی ۔ خط (۱) مخروطی کو مس کریگا اگر مساوات (۲) کی دونوں اصلیں مساوی ہوں یعنی اگر مساوات (۲) کی دوسری اصل بھی صفر ہو یعنی اگر

(ا لا، + ھ ما، + گ) ل + (ھ لا، + ب ما، + ف) م = ۰ ...... (۳)

اب اگر (۱) اور (۳) کی مدد سے ل/م کو ساقط کیا جائے تو مخروطی س = ۰ کے نقطہ (لا، ما،) پر کے مماس کی مساوات حاصل ہوگی جو حسب ذیل ہے :-

(لا - لا،)/ل × (ا لا، + ھ ما، + گ) ل = - (ما - ما،)/م (ھ لا، + ب ما، + ف) م

یعنی (لا - لا،) (ا لا، + ھ ما، + گ) + (ما - ما،) (ھ لا، + ب ما، + ف) = ۰

مختصر کرنے اور رشتہ س، = ۰ کو استعمال کرنے سے یہ مساوات ہوجاتی ہے

ا لا لا، + ھ (لا ما، + لا، ما) + ب ما ما، + گ (لا + لا،) + ف (ما + ما،) + ج = ۰

یعنی م، = ۰

پس معلوم ہوا کہ مخروطی س = ۰ کے نقطہ (لا، ما،) پر کے مماس کی مساوات ہے

م، = ۰

نوٹ - (i) یہ نتیجہ درست ہے خواہ محور قائم ہوں یا مائل۔

(ii) غور سے دیکھا جائے کہ س = ۰ کے نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ پر کے مماس کی مساوات حاصل ہوتی ہے جبکہ لا^2 کی بجائے لالا_1، ما^2 کی بجائے ماما_1، ۲لاما کی بجائے $(\text{لاما}_1 + \text{لا}_1\text{ما})$، ۲لا کی بجائے $(\text{لا} + \text{لا}_1)$، اور ۲ما کی بجائے $(\text{ما} + \text{ما}_1)$ درج کیا جائے۔

۵ - مخروطی کی مساوات ہے س = ۰

تفرقی احصاء سے ہمیں معلوم ہے کہ کسی ترسیم س = ۰ کے نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ پر

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\left(\frac{\frac{\text{جف س}}{\text{جف لا}}}{\frac{\text{جف س}}{\text{جف ما}}}\right)_{\substack{\text{لا} = \text{لا}_1 \\ \text{ما} = \text{ما}_1}} = -\frac{\text{ا لا}_1 + \text{ھ ما}_1 + \text{گ}}{\text{ھ لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ف}}$$

اس لیے $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ پر کے مماس کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{لا} - \text{لا}_1} = -\frac{\text{ا لا}_1 + \text{ھ ما}_1 + \text{گ}}{\text{ھ لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ف}}$$

اس مساوات کو مختصر کرنے سے مساوات $\text{م}_1 = ۰$ حاصل ہوتی ہے۔

۶ - مخروطی س = ۰ کے نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ پر کے مماس کی مساوات کی مدد سے حاصل ہوتا ہے کہ

(i) دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + ۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج} = ۰$ کے نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ پر کے مماس کی مساوات ہے $\text{لالا}_1 + \text{ماما}_1 + \text{گ}(\text{لا} + \text{لا}_1) + \text{ف}(\text{ما} + \text{ما}_1) + \text{ج} = ۰$

(ii) مکافی $\text{ما}^2 = ۴\text{ا لا}$ کے نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ پر کے مماس کی مساوات ہے

$$\text{ماما}_1 = ۲\text{ا}(\text{لا} + \text{لا}_1)$$

(iii) ناقص یا زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} \pm \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ پر کے مماس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لالا}_1}{\text{ا}^2} \pm \frac{\text{ماما}_1}{\text{ب}^2} = ۱$$

(۱۷) زائد لا ما = ک۲ کے نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے مماس کی مساوات ہے

(لا ما۱ + لا۱ ما) = ۲ ک۲ = ۲ لا۱ ما۱

یعنی

لا / ۲ لا۱ + ما / ۲ ما۱ = ۱

۷ - اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ خط ل لا + م ما + ن = ۰ مخروطی س = ۰ کو مس کرے۔

فرض کرو کہ دیا ہوا خط مخروطی کو (لا۱، ما۱) پر مس کرتا ہے۔
مخروطی کے نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے مماس کی مساوات ہے

لا (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ) + ما (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف) + (گ لا۱ + ف ما۱ + ج) = ۰

لیکن اسی مماس کی مساوات ہے ل لا + م ما + ن = ۰۔

∴ (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ) / ل = (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف) / م = (گ لا۱ + ف ما۱ + ج) / ن = لہ، فرض کرو۔

تب ا لا۱ + ھ ما۱ + گ - ل لہ = ۰، ھ لا۱ + ب ما۱ + ف - م لہ = ۰،
گ لا۱ + ف ما۱ + ج - ن لہ = ۰۔

نیز چونکہ نقطہ تماس (لا۱، ما۱) مماس پر ہوتا ہے، اس لیے
ل لا۱ + م ما۱ + ن = ۰۔

مندرجہ بالا چار رشتوں سے لا۱، ما۱ اور لہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ا	ھ	گ	ل
ھ	ب	ف	م
گ	ف	ج	ن
ل	م	ن	۰

= ۰

یہ اس امر کی شرط ہے کہ خط ل لا + م ما + ن = ۰، مخروطی س = ۰ کو مس کرے۔

نوٹ ۔ تماس کی شرط حسب ذیل شکل میں بھی لکھی جا سکتی ہے :۔

ا ل٘ + ب م٘ + ج ن٘ + ۲ ف م ن + ۲ گ ن ل + ۲ ھ ل م = ۰

جہاں اٗ، بٗ، جٗ، فٗ، گٗ، ھٗ مقطعہ

ا	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	ج

میں ا، ب، ج، ف، گ، ھ کے صغیرے (Minors) ہیں جو اپنی علامتوں کے ساتھ لیے گئے ہیں۔

۸ ۔ دفعہ ۳ سے معلوم ہوتا ہے کہ خط (لا − لا۱)/ل = (ما − ما۱)/م مخروطی س = ۰ کا ایک مماس ہوتا ہے اگر

[(ا لا۱ + ھ ما۱ + گ) ل + (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف) م]٘

= (ا ل٘ + ۲ ھ ل م + ب م٘) س۱

اس رشتے سے ل/م کی دو اور صرف دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جن میں سے ہر ایک کے جواب میں (لا۱، ما۱) میں سے س = ۰ تک کھینچا ہوا ایک مماس حاصل ہوتا ہے۔ پس معلوم ہوا کہ کسی دیے ہوئے نقطے سے مخروطی کے دو اور صرف دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔

۹ ۔ وترِ تماس کی مساوات ۔

فرض کرو کہ ن۱ (لا۱، ما۱) سے مخروطی س = ۰ تک کھینچے ہوئے دو مماسوں کے نقاط تماس ت۱ (لاَ، ماَ) اور ت۲ (لاً، ماً) ہیں۔ ہمیں ت۱، ت۲ میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات معلوم کرنا ہے۔ ت۱ (لاَ، ماَ) پر کے مماس کی مساوات ہے

ا لا لاَ + ھ (لا ماَ + لاَ ما) + ب ما ماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + ج = ۰

چونکہ ت۱ پر کا مماس ن۱ (لا۱، ما۱) میں سے گزرتا ہے، اس لیے

ا لا۱ لاَ + ھ (لا۱ ماَ + لاَ ما۱) + ب ما۱ ماَ + گ (لا۱ + لاَ) + ف (ما۱ + ماَ) + ج = ۰　　(i)

اسی طرح چونکہ ت۲ (لاً، ماً) پر کا مماس ن۱ (لا۱، ما۱) میں سے گزرتا ہے، اس لیے

ا لا۱ لاً + ھ (لا۱ ماً + لاً ما۱) + ب ما۱ ماً + گ (لا۱ + لاً) + ف (ما۱ + ماً) + ج = ۰　　(ii)

اب خط مستقیم

ا لا لا۱ + ھ (لا ما۱ + لا۱ ما) + ب ما ما۱ + گ (لا + لا۱) + ف (ما + ما۱) + ج = ۰　　(iii)

پر غور کرو۔ رشتوں (i) اور (ii) سے معلوم ہوتا ہے کہ نقاط ت۱ اور ت۲ خط (iii) پر واقع ہیں۔ یعنی مساوات (iii) اس خط کی مساوات ہے جو ت۱، ت۲ میں سے گزرتا ہے۔

یعنی (لا۱، ما۱) سے س = ۰ تک کھینچے ہوئے مماسوں کے وتر تماس کی مساوات ہے

م۱ = ۰

نوٹ۔ اگر (لا۱، ما۱) مخروطی س = ۰ پر ہو تو م۱ = ۰ سے اس نقطے پر کا مماس تعبیر ہوگا۔ یہ مماس در اصل اُن منطبق مماسات کا وتر تماس ہے جو (لا۱، ما۱) سے س = ۰ تک کھینچے جائیں۔

۱۰۔ قطبی اور قطب

مخروطی س = ۰ کے لحاظ سے نقطہ (لا۱، ما۱) کے قطبی سے مراد (لا۱، ما۱) میں سے گزرنے والے وتروں کے سروں پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق ہے۔ ہم ثابت کرینگے کہ یہ طریق ایک خط مستقیم ہے۔

فرض کرو کہ (لا۱، ما۱) میں سے گزرنے والے کسی وتر کے سروں پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع ط (لاَ، ماَ) ہے۔ تب وتر مذکور ط (لاَ، ماَ) سے کھینچے ہوئے مماسوں کا وتر تماس ہوگا۔ اس وتر تماس کی مساوات ہے

ا لا لاَ + ھ (لا ماَ + لاَ ما) + ب ما ماَ + گ (لا + لاَ) + ف (ما + ماَ) + ج = ۰

چونکہ یہ وتر نقطہ (لا۱، ما۱) میں سے گزرتا ہے، اس لیے

ا لا۱ لاَ + ھ (لا۱ ماَ + لاَ ما۱) + ب ما۱ ماَ + گ (لا۱ + لاَ) + ف (ما۱ + ماَ) + ج = ۰

نقطہ ط کے طریق کی مساوات حاصل ہوگی اگر اوپر کے رشتے میں (لاَ، ماَ) کی بجائے (لا، ما) لکھے جائیں۔

اس لیے س = ۰ کے لحاظ سے (لا۱، ما۱) کے قطبی کی مساوات ہے

ا لا لا۱ + ھ (لا ما۱ + لا۱ ما) + ب ما ما۱ + گ (لا + لا۱) + ف (ما + ما۱) + ج = ۰

یعنی م۱ = ۰

نوٹ (۱) قطبی کی مساوات درجہ اول کی ہے۔ اس لیے خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

نوٹ (۲) مخروطی س = ۰ کے لحاظ سے (لا۱، ما۱) کے قطبی کی مساوات وہی ہے جو (لا۱، ما۱) سے کھینچے ہوئے مماسوں کے وتر تماس کی ہے۔ یعنی قطبی اور وتر تماس ایک ہی خط کے دو مختلف نام ہیں۔

اگر نقطہ (لا۱، ما۱) مخروطی کے اندر ہو تو (لا۱، ما۱) سے مخروطی تک کھینچے ہوئے مماس خیالی ہونگے اور ان کے نقاط تماس بھی خیالی ہونگے لیکن اِن خیالی نقاط تماس میں سے گزرنے والے خط کی مساوات حقیقی ہوگی یعنی خط حقیقی ہوگا۔ یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ ہر حقیقی خط پر بے شمار خیالی نقطے ہوتے ہیں۔ مثلاً خط لا + ما = ۳ پر خیالی نقاط (۱ + √-خ، ۲ - √-خ)؛ (۲ + √-خ، ۱ - √-خ)؛ (۳ + √-خ، - √-خ) واقع ہیں۔ لیکن کسی خیالی خط پر صرف ایک حقیقی نقطہ ہوسکتا ہے کیونکہ اگر دو حقیقی نقطے واقع ہوں تو خط حقیقی ہوجائیگا۔

نوٹ (۳) اگر مخروطی س = ۰ کے لحاظ سے نقطہ ن کا قطبی خط مستقیم ل ہو تو نقطہ ن مخروطی س = ۰ کے لحاظ سے خط ل کا قطب کہلاتا ہے۔

۱۱ - مزدوج نقطے - مزدوج خط

آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر س = ۰ کے لحاظ سے (لا۱، ما۱) کا قطبی (لا۲، ما۲) میں سے گزرے تو (لا۲، ما۲) کا قطبی (لا۱، ما۱) میں سے گزریگا۔
مذکورہ بالا خاصیت رکھنے والے نقاط (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲) مخروطی س = ۰ کے لحاظ سے **مزدوج نقطے** کہلاتے ہیں۔

اسی طرح آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر مخروطی س = ۰ کے لحاظ سے خط ل۱ کا قطب خط ل۲ پر ہو تو خط ل۲ کا قطب خط ل۱ پر ہوگا۔ ایسے دو خط مخروطی س = ۰ کے لحاظ سے **مزدوج خط** کہلاتے ہیں۔

نیز یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ہم خط نقطوں کے قطبی متراکز ہوتے ہیں اور متراکز خطوں کے قطب ہم خط ہوتے ہیں۔

۱۲ - مثلث مزدوج بالذّات

اگر مخروطی س = ۰ کے لحاظ سے مثلث ا ب ج کے ہر راس کا قطبی مقابل کا ضلع ہو تو کہا جاتا ہے کہ مخروطی س = ۰ کے لحاظ سے مثلث ا ب ج **مزدوج بالذّات** ہے۔

نوٹ - آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ مثلث مزدوج بالذّات کے ہر دو ضلعے مزدوج خط ہیں۔

۱۳ - دیے ہوئے خط کے قطب کے محدد

فرض کرو کہ مخروطی س = ۰ کے لحاظ سے دیے ہوئے خط ل لا + م ما + ن = ۰ کا

ر^{2} (ا ل^{2} + ۲ ھ ل م + ب م^{2}) + ۲ ر [(ا لا$_{1}$ + ھ ما$_{1}$ + گ) ل

+ (ھ لا$_{1}$ + ب ما$_{1}$ + ف) م] + س$_{1}$ = ۰

اس مساوات کی دو اصلیں (لا$_{1}$، ما$_{1}$) سے وتر کے سروں کے فاصلوں کو تعبیر کرتی ہیں ۔ چونکہ (لا$_{1}$، ما$_{1}$) مرکز ہے

اس لیے اس مساوات کی اصلیں مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہونگی ۔

یعنی

(ا لا$_{1}$ + ھ ما$_{1}$ + گ) ل + (ھ لا$_{1}$ + ب ما$_{1}$ + ف) م = ۰

جہاں ل، م کوئی مقداریں ہیں ۔

∴ ا لا$_{1}$ + ھ ما$_{1}$ + گ = ۰ اور ھ لا$_{1}$ + ب ما$_{1}$ + ف = ۰

ان ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے سے مرکز کے محدد (لا$_{1}$، ما$_{1}$) حاصل ہوتے ہیں ۔

چنانچہ

لا$_{1}$ = $\frac{\text{ھ ف - ب گ}}{\text{ا ب - ھ}^{2}}$ ؛ ما$_{1}$ = $\frac{\text{ھ گ - ا ف}}{\text{ا ب - ھ}^{2}}$

نوٹ (۱) مخروطی س = ۰ کا مرکز صرف اس صورت میں محدود فاصلے پر ہوگا جبکہ ا ب - ھ^{2} ≠ ۰ ۔ یعنی جبکہ مخروطی مکافی نہ ہو ۔ پس معلوم ہوا کہ صرف ناقص اور زائد کے مرکز محدود فاصلے پر ہوتے ہیں ۔ اس بنا پر ناقص اور زائد مرکز دار مخروطی کہلاتے ہیں ۔ مکافی کا مرکز لاتناہی پر ہوتا ہے ۔

نوٹ (۲) مخروطی س = ۰ کے مرکز (لا$_{1}$، ما$_{1}$) سے مخروطی تک کھینچے ہوئے مماسات کے وتر تماس کی مساوات ہوگی

لا (ا لا$_{1}$ + ھ ما$_{1}$ + گ) + ما (ھ لا$_{1}$ + ب ما$_{1}$ + ف) + گ لا$_{1}$ + ف ما$_{1}$ + ج = ۰

یعنی $\text{گ}\,\text{لا}_1 + \text{ف}\,\text{ما}_1 + \text{ج} = ۰$ یعنی مستقل = صفر جو لاتناہی پر کے خط کی مساوات ہے۔

پس معلوم ہوا کہ مرکز کا قطبی لاتناہی پر کا خط ہے۔

نوٹ (۳) اگر مساوات

$$\text{ا}\,\text{لا}^2 + ۲\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 + ۲\,\text{گ}\,\text{لا} + ۲\,\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$$

خطوط کے ایک جوڑے کو تعبیر کرے تو مبداء میں سے اِن خطوط کے متوازی کھینچے ہوئے خطوط کی مساوات ہوگی

$$\text{ا}\,\text{لا}^2 + ۲\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 = ۰$$

اس لیے $\text{س} = ۰$ سے خطوط کا ایک جوڑا تعبیر ہو تو اُن کا درمیانی زاویہ وہی ہوگا جو خطوط $\text{ا}\,\text{لا}^2 + ۲\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 = ۰$ کے درمیان ہے۔

۱۶- مخروطی $\text{س} = ۰$ کے اس وتر کی مساوات جس کا وسطی نقطہ $\text{ن}_1(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ ہے۔

فرض کرو کہ مطلوبہ وتر کی مساوات ہے $\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{م}} = \text{ر}$

یعنی $\text{لا} = \text{لا}_1 + \text{ر}\text{ل}$ ؛ $\text{ما} = \text{ما}_1 + \text{ر}\text{م}$

اگر یہ نقطہ مخروطی پر ہے تو گذشتہ دفعہ کی طرح حاصل ہوتا ہے کہ

$$(\text{ا}\,\text{لا}_1 + \text{ھ}\,\text{ما}_1 + \text{گ})\,\text{ل} + (\text{ھ}\,\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_1 + \text{ف})\,\text{م} = ۰$$

یعنی $$\frac{\text{ل}}{\text{م}} = -\frac{\text{ھ}\,\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_1 + \text{ف}}{\text{ا}\,\text{لا}_1 + \text{ھ}\,\text{ما}_1 + \text{گ}}$$

لیکن خط کی مساوات سے

$$\frac{\text{ل}}{\text{م}} = \frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ما} - \text{ما}_1}$$

∴ مطلوبہ وتر کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ما} - \text{ما}_1} = - \frac{\text{ھ لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ف}}{\text{ا لا}_1 + \text{ھ ما}_1 + \text{گ}} \quad \text{یعنی} \quad \text{م}_1 = \text{س}_1$$

نوٹ۔ اگر (لا₁، ما₁) مخروطی کا مرکز ہو تو $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ کی قیمت غیر معین ہو جاتی ہے یعنی مرکز میں سے گزرنے والے ہر وتر کی تنصیف مرکز پر ہوتی ہے جیسا کہ مرکز کی تعریف سے ظاہر ہے۔

۱۷۔ مخروطی س = ۰ کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کے طریق کی مساوات ـــ

فرض کرو کہ وتروں کے دیے ہوئے نظام کا ہر رکن خط ما = م لا کے متوازی ہے۔ اگر اِس نظام کے کسی وتر کا وسطی نقطہ (لا₁، ما₁) ہو تو اُس وتر کی مساوات ہوگی م₁ = س₁

$$\text{یعنی} \quad \text{ما} = - \frac{\text{ا لا}_1 + \text{ھ ما}_1 + \text{گ}}{\text{ھ لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ف}} \text{لا} + \text{ھر} \quad \text{جہاں ھر مستقل ہے۔}$$

چونکہ یہ خط ما = م لا کے متوازی ہے، اس لیے $\text{م} = - \frac{\text{ا لا}_1 + \text{ھ ما}_1 + \text{گ}}{\text{ھ لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ف}}$

اس لیے (لا₁، ما₁) کے طریق کی مساوات ہے

$$(\text{ا لا} + \text{ھ ما} + \text{گ}) + \text{م} (\text{ھ لا} + \text{ب ما} + \text{ف}) = \text{صفر}$$

نوٹ۔ یہ طریق مخروطی کے مرکز میں سے گزرنے والا خط مستقیم ہے۔

۱۸۔ دو مخروطیوں کے نقاط تقاطع ـــ

دو مخروطیوں $\text{س} = \text{ا لا}^2 + ۲\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + ۲\,\text{گ لا} + ۲\,\text{ف ما} + \text{ج} = ۰$

اور س َ = اَ لا^۲ + ۲ ھَ لا ما + بَ ما^۲ + ۲ گَ لا + ۲ فَ ما + جَ = ۰

کے نقاط تقاطع پر یہ دونوں مساواتیں ایک ساتھ پوری ہونگی یعنی نقاط تقاطع معلوم کرنے کے لیے مندرجہ بالا مساواتوں کو، جن میں سے ہر ایک (لا، ما) میں درجۂ دوم کی ہے، ہمزاد مساواتوں کی طرح حل کرنا ہوگا۔ اس طرح سے (لا، ما) کی قیمتوں کے چار اور صرف چار جوڑے حاصل ہونگے جو دیے ہوئے دو مخروطیوں کے نقاط تقاطع کے محدد ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ دو مخروطی ایک دوسرے کو چار اور صرف چار نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔

نوٹ ۔ اِن چار نقاط تقاطع میں سے دو یا چار نقطے خیالی ہوسکتے ہیں۔ مثلاً دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ۱ اور مکافی ما^۲ = ۴ (لا - ۲) کے چاروں نقاط تقاطع خیالی ہیں۔

۱۹- مخروطیوں س = ۰ اور س َ = ۰ کے چار نقاط تقاطع میں سے گذرنے والے کسی مخروطی کی مساوات۔

مخروطیوں س = ۰ اور س َ = ۰ کے چار نقاط تقاطع میں سے گذرنے والے کسی مخروطی کی مساوات ہوگی س + ک س َ = ۰ جہاں ک کوئی مستقل ہے (بشرطیکہ س + ک س َ = ۰ درجہ دوم کی مساوات ہو)

چونکہ مساوات س + ک س َ = ۰ درجہ دوم کی ہے، اس لیے اس سے ایک مخروطی تعبیر ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ س = ۰ اور س َ = ۰ کے نقاط تقاطع ہیں

(لار، مار) ر = ۱، ۲، ۳، ۴

تب سر = ۰ اور س َر = ۰

∴ سر + ک س َر = ۰ یعنی نقطہ (لار، مار) مخروطی س + ک س َ = ۰ پر ہے

پس معلوم ہوا کہ مخروطیوں س = ۰ اور سَ = ۰ کے چاروں نقاط تقاطع مخروطی س + ک سَ = ۰ پر ہیں۔

یعنی س + ک سَ = ۰ سے ایک ایسی مخروطی تراش تعبیر ہوتی ہے جو س = ۰ اور سَ = ۰ کے چاروں نقاط تقاطع میں سے گذرتی ہے۔

نوٹ:۔ مخروطی کی عام مساوات میں بظاہر چھ مستقل ہیں لیکن مساوات کی دونوں جانبوں کو ان میں سے کسی ایک مستقل پر تقسیم کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مخروطی کی مساوات میں در اصل پانچ اختیاری مستقل ہیں اور ان مستقلات کا تعین ایسی پانچ غیر تابع شرطوں سے ہوتا ہے جن کو مخروطی پورا کرتی ہے۔ مثلاً پانچ دیے ہوئے نقطوں میں سے (جن میں سے کوئی تین ہم خط نہ ہوں) ایک اور صرف ایک مخروطی تراش گذرتی ہے۔

اوپر کے دفعہ میں مساوات س + ک سَ = ۰ کسی ایسی مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جو س = ۰ اور سَ = ۰ کے چار نقطوں میں سے گذرتی ہے۔ اگر ایک اور شرط دی جائے جس کو مخروطی س + ک سَ = ۰، پورا کرتی ہے تو اس شرط کی مدد سے ک کی قیمت متعین ہوتی ہے۔ مثلاً اگر مخروطی نقطہ $(لا_۰، ما_۰)$ میں سے گذرتی ہے تو

$$س_۰ + ک\, سَ_۰ = ۰ \quad \text{یعنی} \quad ک = -\frac{س_۰}{سَ_۰}$$

اس لیے مطلوبہ مخروطی ہے $\frac{س}{سَ} = \frac{س_۰}{سَ_۰}$.

۲۰۔ س = ۰ ایک مخروطی ہے اور ل = ۰ ایک خط ہے۔ تب $ل^۲ = ۰$ کو (یعنی منطبق خطوط کے ایک جوڑے کو) مخروطی تصور کیا جا سکتا ہے۔ مخروطی $ل^۲ = ۰$، مخروطی س = ۰ کو جن چار نقطوں پر قطع کرتی ہے ان میں سے دو منطبق ہیں اور بقیہ دو بھی منطبق ہیں۔ اس لیے مخروطی $س + ک\, ل^۲ = ۰$ مخروطی س = ۰ کو دو نقطوں پر مس کرتی ہے۔ یہ نقاط تماس س = ۰ اور ل = ۰ کے

نقاط تقاطع پر ہیں۔

۲۱۔ کسی دیے ہوئے نقطہ $(لا_1، ما_1)$ سے مخروطی $س = 0$ کے مماسات کا جوڑا۔

$(لا_1، ما_1)$ سے $س = 0$ تک کھینچے ہوئے مماسات سے ایک ایسی مخروطی تراش حاصل ہوتی ہے جو نقطہ $(لا_1، ما_1)$ میں سے گزرتی ہے اور $س = 0$ کو $س = 0$ اور $م_1 = 0$ کے نقاط تقاطع پر مس کرتی ہے۔

$س = 0$ کو $س = 0$ اور $م_1 = 0$ کے نقاط تقاطع پر مس کرنے والی کسی ایک مخروطی کی مساوات ہوگی

$$س + ک م_1^2 = 0$$

اگر یہ مخروطی $(لا_1، ما_1)$ میں سے گذرتی ہے تو

$$س_1 + ک م_{11}^2 = 0$$

لیکن $س_1 = م_{11}$ ۔ اس لیے $ک = -\frac{1}{س_1}$

اس لیے مطلوبہ مماسات کی مشترک مساوات ہے

$$س + \left(-\frac{1}{س_1}\right) م_1^2 = 0 \quad \text{یعنی} \quad س س_1 = م_1^2$$

۲۲۔ مرتب دائرہ۔ اس نقطے کا طریق معلوم کرو جس سے مخروطی $س = 0$ تک کھینچے ہوئے مماسات باہم علی القوائم ہیں۔

فرض کرو کہ مطلوبہ طریق پر کا کوئی نقطہ $(لا_1، ما_1)$ ہے۔ تب $(لا_1، ما_1)$ سے

مخروطی س = ۰ تک کھینچے ہوئے مماسات کی مشترک مساوات ہوگی

$$\text{س س}_1 - \text{م}_1^2 = \text{صفر}$$

یہ خطوط علی القوائم ہونگے اگر ان کی مساوات میں لا^2 کا سر + ما^2 کا سر = صفر

یعنی اگر (ا ب - ھ^2) (لا$_1^2$ + ما$_1^2$) - ۲ (ھ ف - ب گ) لا$_1$ - ۲ (ھ گ - ا ف) ما$_1$

+ (ا + ب) ج - ف^2 - گ^2 = ۰

اس لیے مطلوبہ طریق کی مساوات ہے

(ا ب - ھ^2) (لا^2 + ما^2) - ۲ (ھ ف - ب گ) لا - ۲ (ھ گ - ا ف) ما

+ (ا + ب) ج - ف^2 - گ^2 = ۰

نوٹ - یہ طریق ایک دائرہ ہے - اس کو مخروطی س = ۰ کا **مرتب دائرہ** کہتے ہیں - اگر مخروطی مکافی ہو تو (ا ب - ھ^2) = ۰ اس صورت میں مرتب دائرے کی بجائے ایک خط مستقیم حاصل ہوتا ہے - یہ خط در اصل مکافی کا مرتب ہے -

مرتب دائرے کی مساوات شکل

ج (لا^2 + ما^2) - ۲ گ لا - ۲ ف ما + ا + ب = ۰

میں لکھی جا سکتی ہے جہاں ا، ب، ج، ف، گ صغیرے (مع علامت کے) ہیں، مقطعہ

ا	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	ج

میں ا، ب، ج، ف، گ کے

۲۳ - مخروطی کے متقارب —

مخروطی س = ۰ کے مرکز سے مخروطی تک کھینچے ہوئے مماسات کے نقاط تماس

مخروطی اور لاتناہی پر کے خط کے نقاط تقاطع ہیں۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مخروطی کے مرکز سے کھینچے ہوئے مماسات کے نقاط تماس لاتناہی پر ہیں۔ ایسے مماسات **متقارب** کہلاتے ہیں۔

مخروطی س = ۰ کے متقاربوں کی مساوات حاصل کرنے کے لیے ہمیں مخروطی کے مرکز سے مخروطی تک مماسات کھینچنا ہوگا۔

اگر مخروطی س = ۰ کا مرکز (لا۱، ما۱) ہو تو

$$\text{ا لا}_1 + \text{ھ ما}_1 + \text{گ} = 0 \;؛\; \text{ھ لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ف} = 0$$

نقطہ (لا۱، ما۱) سے مخروطی تک کھینچے ہوئے مماسات کی مشترک مساوات ہے

$$\text{س س}_1 = \text{م}_1^2$$

یعنی $\text{س}\left[\text{لا}_1(\text{ا لا}_1 + \text{ھ ما}_1 + \text{گ}) + \text{ما}_1(\text{ھ لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ف}) + (\text{گ لا}_1 + \text{ف ما}_1 + \text{ج})\right]$

$$= \left[\text{لا}(\text{ا لا}_1 + \text{ھ ما}_1 + \text{گ}) + \text{ما}(\text{ھ ما}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ف}) + (\text{گ لا}_1 + \text{ف ما}_1 + \text{ج})\right]^2$$

چونکہ $\text{ا لا}_1 + \text{ھ ما}_1 + \text{گ} = 0$ اور $\text{ھ لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ف} = 0$، اس لیے مرکز سے کھینچے ہوئے مماسات کی مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{س}(\text{گ لا}_1 + \text{ف ما}_1 + \text{ج}) = (\text{گ لا}_1 + \text{ف ما}_1 + \text{ج})^2$$

یعنی $\text{س} = \text{گ لا}_1 + \text{ف ما}_1 + \text{ج}$

یعنی $\text{س} = \text{گ}\left(\frac{\text{ھ ف} - \text{ب گ}}{\text{ا ب} - \text{ھ}^2}\right) + \text{ف}\left(\frac{\text{ھ گ} - \text{ا ف}}{\text{ا ب} - \text{ھ}^2}\right) + \text{ج}$

یعنی $\text{س} = \frac{\text{ا ب ج} + 2\,\text{ف گ ھ} - \text{ا ف}^2 - \text{ب گ}^2 - \text{ج ھ}^2}{\text{ا ب} - \text{ھ}^2}$

یعنی $\text{س} = \frac{\Delta}{\text{ا ب} - \text{ھ}^2}$ جہاں $\Delta = \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix}$

نوٹ (۱) اگر مخروطی مکافی ہو تو $ا ب - ھ^2 = ۰$۔ اس صورت میں مرکز لاتناہی پر ہوگا اور مکافی کے متقارب لاتناہی پر کے خط پر منطبق ہونگے۔

نوٹ (۲) مخروطی $س = ۰$ کے متقاربوں کی مساوات میں اور مخروطی کی مساوات میں صرف رقم مطلق کا فرق ہے۔ اس لیے عددی مثالوں میں مخروطی کے متقارب معلوم کرنے کے لیے رقم مطلق کی قیمت کو اس طرح بدلنا ہوگا کہ نئی مساوات خطوط کے ایک جوڑے کی شرط کو پورا کرے۔

نوٹ (۳) مبداء میں سے مخروطی $س = ۰$ کے متقاربوں کے متوازی کھینچے ہوئے خطوط کی مساوات ہوگی $ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰$

یہ خطوط حقیقی یا خیالی ہونگے بموجب اس کے کہ $ا ب - ھ^2 \gtrless ۰$

یعنی بموجب اس کے کہ مخروطی زائد ہے یا ناقص۔

نوٹ (۴) زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے متقارب ہیں

$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} =$ صفر۔ اگر $ا = ب$ تو یہ متقارب علی القوائم ہونگے

اس صورت میں زائد **قائم زائد** کہلاتا ہے۔ قائم زائد کا خروج المرکز

$= \sqrt{۲}$۔

۲۴۔ مخروطی $ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$ اور خط $ل لا + م ما = ۱$ کے نقاط تقاطع کو مبداء سے ملانے والے خطوط کے جوڑے کی مساوات حاصل کرو۔

مساوات

$ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 + (۲ گ لا + ۲ ف ما)(ل لا + م ما)$

$+ ج (ل لا + م ما)^2 =$ صفر پر غور کرو۔۔۔۔ (ا)

یہ درجہ دوم کی متجانس مساوات ہے۔ اس لیے مبداء میں سے گذرنے والے خطوط کے ایک جوڑے کو تعبیر کرتی ہے۔

اگر مخروطی اور خط کا ایک نقطہ تقاطع (لا$_1$، ما$_1$) ہو تو

ل لا$_1$ + م ما$_1$ = ۱　　اور　　ا لا$_1^2$ + ۲ ھ لا$_1$ ما$_1$ + ب ما$_1^2$ + ۲ گ لا$_1$ + ۲ ف ما$_1$ + ج = ۰

ان رشتوں سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) خطوط (ز) پر واقع ہے۔ اسی طرح مخروطی اور خط کا دوسرا نقطہ بھی خطوط (ز) پر ہوگا۔

یعنی مساوات (ز) سے خطوط کا وہ جوڑا تعبیر ہوتا ہے جو مخروطی اور خط کے نقاط تقاطع کو مبداء سے ملانے سے حاصل ہوتا ہے۔

نوٹ (۱) مساوات (ز) حاصل ہوتی ہے جبکہ خط کی مساوات کی مدد سے مخروطی کی مساوات کو متجانس بنایا جائے۔

(۲) اگر مساوات (ز) سے تعبیر ہونے والے خطوط منطبق ہوں تو خط ل لا + م ما = ۱ اور مخروطی س = ۰ کے نقاط تقاطع منطبق ہونگے یعنی خط ل لا + م ما = ۱ مخروطی کو مس کریگا۔ اس طریقے سے خط ل لا + م ما = ۱ اور مخروطی س = ۰ کے تماس کی شرط معلوم کیجا سکتی ہے۔

مشقی سوالات

۱۔ مخروطی س = ۰ کے کسی مماس کا قطب مخروطی سَ = ۰ کے لحاظ سے لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ قطب کا طریق ایک اور مخروطی ہے۔

۲۔ دائرہ لا^2 + ما^2 = ر^2 کے کسی مماس کا قطب مکافی ما^2 = ۴ ا لا کے لحاظ سے لیا گیا ہے۔ قطب کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

۳۔ مکافی ما^2 = ۴ ا لا کے عمادی وتروں کے قطبوں کا طریق معلوم کرو۔

۴۔ مخروطی س = ۰ کے اُن وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرو جو نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) میں سے گذرتے ہیں۔

۵۔ مرکز دار مخروطی $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} \pm \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}$ = ۱ کے مرتب دائرے کی مساوات حاصل کرو۔ نیز بتاؤ کہ زائد کا مرتب دائرہ کس صورت میں حقیقی ہوتا ہے۔

۶۔ مکافی لا^{۲} + ۲ لا ما + ما^{۲} − ۳ لا + ۶ ما − ۴ = ۰ کے مرتب کی مساوات حاصل کرو۔ نیز اس نتیجے کو استعمال کرکے کہ مکافی کے ماسکہ کا قطبی مرتب ہوتا ہے، مکافی کے ماسکہ کے محدد معلوم کرو۔

۷۔ ثابت کرو کہ مخروطی کے کسی نقطے پر کے مماس اور عماد کو حوالے کے محور ماننے سے مخروطی کی مساوات کی شکل حسب ذیل ہوتی ہے ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + ۲ ف ما = ۰۔ اس نتیجے کی مدد سے ثابت کرو کہ مخروطی کے ایسے وتر جن کے مقابل مخروطی کے ایک نقطہ ن پر قائمہ زاویہ بنتا ہے نقطہ ن پر کے عماد سے ایک ثابت نقطے پر ملتے ہیں۔

۸۔ ثابت کرو کہ مخروطی س = ۰ اور خط مستقیم ل لا + م ما = ۱ کے نقاط تقاطع کو مبدا سے ملانے والے خطوط کی مساوات حسب ذیل ہے

ا لا^{۲} + ۲ ھ لا ما + ب ما^{۲} + (۲ گ لا + ۲ ف ما) (ل لا + م ما)

+ ج (ل لا + م ما)^{۲} = ۰

اس کی مدد سے اس امر کی شرط معلوم کرو کہ خط ل لا + م ما = ۱ مخروطی کو مس کرے۔

۹۔ مکافی ما^{۲} = ۴ ا لا کے عمادی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرو۔

۱۰۔ مرکز دار مخروطی کی معیاری مساوات لا^{۲}/ا^{۲} ± ما^{۲}/ب^{۲} = ۱ کی مدد سے ثابت کرو کہ مرکز دار مخروطی کے متقارب تشاکل کے ہر محور سے مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ اگر متقاربوں کا درمیانی زاویہ ۲ عہ ہو تو مخروطی کا خروج المرکز ز = قط عہ۔ اس نتیجے کی مدد سے مخروطی س = ۰ کا خروج المرکز معلوم کرو۔ نیز ثابت کرو کہ مخروطی س = ۰ کے تشاکل کے محوروں کی مساوات

$$\frac{(\text{لا} - \text{لا}_1)^2 - (\text{ما} - \text{ما}_1)^2}{\text{ا} - \text{ب}} = \frac{(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{ما} - \text{ما}_1)}{\text{ھ}}$$ ہے

جہاں (لا_1، ما_1) مخروطی کے مرکز کے محدد ہیں۔

۱۱۔ کسی نقطہ و میں سے دی ہوئی سمتوں میں کھینچے ہوئے خط ایک دیے ہوئے مخروطی سے ف_1، ف_2 اور ق_1، ق_2 پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{و ف}_1 \times \text{و ف}_2}{\text{و ق}_1 \times \text{و ق}_2}$ = مستقل (یہ نتیجہ نیوٹن کا مسئلہ کہلاتا ہے)

۱۲۔ ثابت کرو کہ مخروطی کے ماسکہ سے کھینچے ہوئے مماسات کے جوڑے کی مساوات دائرے کی شرطوں کو پورا کرتی ہے۔ اس کی مدد سے مخروطی س = ۰ کے ماسکے حسب ذیل ہمزاد مساواتوں کی مدد سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\frac{(\text{ا لا} + \text{ھ ما} + \text{گ})^2 - (\text{ھ لا} + \text{ب ما} + \text{ف})^2}{\text{ا} - \text{ب}} = \frac{(\text{ا لا} + \text{ھ ما} + \text{گ})(\text{ھ لا} + \text{ب ما} + \text{ف})}{\text{ھ}} = \text{س}$$

چوتھا باب

مخروطی تراشوں کی اہم خاصیتیں

(ا) دائرہ

ا۔ دائرے کی مساوات ـــــ

اگر محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہو اور دائرے کا نصف قطر ر ہو تو دائرے کی مساوات ہوگی

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)^2 + (\text{ما} - \text{ما}_1)^2 + 2(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{ما} - \text{ما}_1)\ \text{جم سہ} = \text{ر}^2$$

کیونکہ دائیں جانب کے جملے سے مرکز (لا، ما،) اور دائرے پر کے کسی نقطہ (لا، ما) کے درمیانی فاصلے کا مربع تعبیر ہوتا ہے۔

اس مساوات میں

$$\text{لا}^2\ \text{کا سر} = \text{ما}^2\ \text{کا سر} \quad \text{اور} \quad 2\,\text{لاما کا سر} = \text{لا}^2\ \text{کا سر} \times \text{جم سہ}$$

اگر محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہو تو مساوات س = ۰ مندرجہ بالا شرطوں کو پورا کرے تو س = ۰ سے ایک دائرہ تعبیر ہوتا ہے۔ س = ۰ کی صورت میں دائرے کی شرطیں ہیں

ا = ب اور ھ = ا جم سہ

مثال - اگر ذیل کی مساوات سے ایک دائرہ تعبیر ہو تو محوروں کا درمیانی زاویہ، دائرے کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔

لا^{۲} + لا ما + ما^{۲} - ۴ لا - ۵ ما - ۲ = ۰

فرض کرو کہ محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہے۔ دی ہوئی مساوات میں

لا^{۲} کا سر = ما^{۲} کا سر = ۱

دائرے کے لیے دوسری شرط ہے کہ

۲ لا ما کا سر = لا^{۲} کا سر × جم سہ

یعنی $\frac{۱}{۲}$ = ۱ × جم سہ

∴ سہ = ۶۰°

فرض کرو کہ دائرے کا مرکز (لا$_{۱}$، ما$_{۱}$) ہے اور نصف قطر ر ہے۔
تب دائرے کی مساوات ہوگی

(لا - لا$_{۱}$)^{۲} + (ما - ما$_{۱}$)^{۲} + ۲ (لا - لا$_{۱}$) (ما - ما$_{۱}$) جم ۶۰° = ر^{۲}

یعنی لا^{۲} + لا ما + ما^{۲} - لا (۲ لا$_{۱}$ + ما$_{۱}$) - ما (لا$_{۱}$ + ۲ ما$_{۱}$) + لا$_{۱}^{۲}$ + لا$_{۱}$ ما$_{۱}$ + ما$_{۱}^{۲}$ - ر^{۲} = ۰

اس کا مقابلہ دی ہوئی مساوات سے کرنے سے حاصل ہوتا ہے

۲ لا$_{۱}$ + ما$_{۱}$ = ۴ ؛ لا$_{۱}$ + ۲ ما$_{۱}$ = ۵ اور لا$_{۱}^{۲}$ + ما$_{۱}^{۲}$ + لا$_{۱}$ ما$_{۱}$ - ر^{۲} = - ۲

ان سے حاصل ہوتا ہے

لا$_{۱}$ = ۱ ؛ ما$_{۱}$ = ۲ اور ر = ۳

٢۔ دائرے کی قطبی مساوات —

فرض کرو کہ دائرے کا مرکز ھ (ر$_1$، ط$_1$) ہے اور نصف قطر ا ہے۔
اگر دائرے پر کا کوئی نقطہ ن (ر، ط) ہو تو

ھن = ا یعنی ھن^2 = ا^2

یعنی ر^2 + ر$_1^2$ − ٢ رر$_1$ جم (ط − ط$_1$) = ا^2

یہ دائرے کی عام قطبی مساوات ہے۔

خاص صورتیں (i) اُس دائرے کی مساوات جس کا مرکز قطب پر ہے اور نصف قطر ا ہے ر = ا ہے۔

(ii) اُس دائرے کی مساوات جس کا مرکز ابتدائی خط پر ہے اور جو قطب میں سے گذرتا ہے ر = ٢ ا جم ط ہے جہاں ا دائرے کا نصف قطر ہے۔

(iii) اس دائرے کی مساوات جو ابتدائی خط کو قطب پر مس کرتا ہے ر = ٢ ا جب ط ہے جہاں ا دائرے کا نصف قطر ہے۔

٣۔ علی القوائم دائرے —

فرض کرو کہ (و$_1$) اور (و$_2$) دو دائرے ہیں۔ اگر ان دائروں کے ایک نقطہ تقاطع پر اُن کے مماس علی القوائم ہو تو کہا جاتا ہے کہ یہ دائرے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں یا دائرے (و$_1$) اور (و$_2$) علی القوائم ہیں۔

اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ دائرے

$لا^۲ + ما^۲ + ۲گ_۱ لا + ۲ف_۱ ما + ج_۱ = ۰$ ، $لا^۲ + ما^۲ + ۲گ_۲ لا + ۲ف_۲ ما + ج_۲ = ۰$

علی القوائم ہوں۔

فرض کرو کہ اِن دائروں کا ایک نقطہ تقاطع ($لا_۱$ ، $ما_۱$) ہے۔

($لا_۱$ ، $ما_۱$) پر ان دائروں کے مماسوں کی مساواتیں ہونگی

$$لا لا_۱ + ما ما_۱ + گ_۱ (لا + لا_۱) + ف_۱ (ما + ما_۱) + ج_۱ = ۰$$

$$لا لا_۱ + ما ما_۱ + گ_۲ (لا + لا_۱) + ف_۲ (ما + ما_۱) + ج_۲ = ۰$$

یہ مماسات علی القوائم ہونگے اگر

$$(لا_۱ + گ_۱)(لا_۱ + گ_۲) + (ما_۱ + ف_۱)(ما_۱ + ف_۲) = ۰ \quad .....(أ)$$

یعنی اگر

$$۲لا_۱^۲ + ۲ما_۱^۲ + ۲لا_۱ (گ_۱ + گ_۲) + ۲ما_۱ (ف_۱ + ف_۲) + ۲گ_۱ گ_۲ + ۲ف_۱ ف_۲ = ۰$$

لیکن چونکہ نقطہ ($لا_۱$ ، $ما_۱$) دیے ہوئے دائروں پر ہے اس لیے

$$لا_۱^۲ + ما_۱^۲ + ۲گ_۱ لا_۱ + ۲ف_۱ ما_۱ + ج_۱ = ۰$$

$$لا_۱^۲ + ما_۱^۲ + ۲گ_۲ لا_۱ + ۲ف_۲ ما_۱ + ج_۲ = ۰$$

$$\therefore ۲لا_۱^۲ + ۲ما_۱^۲ + ۲لا_۱ (گ_۱ + گ_۲) + ۲ما_۱ (ف_۱ + ف_۲) = -(ج_۱ + ج_۲)$$

اس کی مدد سے شرط (أ) ہوجاتی ہے

$$۲گ_۱ گ_۲ + ۲ف_۱ ف_۲ = ج_۱ + ج_۲$$

یہ اس امر کی شرط ہے کہ دیے ہوئے دائرے علی القوائم ہوں۔ یہ شرط ضروری اور کافی ہے۔

نوٹ (۱) اگر دو دائروں کے ایک نقطۂ تقاطع پر کے مماسوں کا درمیانی زاویہ قائمہ زاویہ ہو تو دوسرے نقطۂ تقاطع پر کے مماس بھی علی القوائم ہونگے۔

(۲) دو دائرے علی القوائم ہونگے اگر مرکزوں کے درمیانی فاصلے کا مربع مساوی ہو ان کے نصف قطروں کے مربعوں کے مجموعہ کے۔ اس خاصیت کی مدد سے بھی علی القوائم دائروں کی مندرجہ بالا شرط حاصل ہوتی ہے۔

۴- دائرہ س = ۰ کے لحاظ سے نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) کی قوت —

بہ آسانی دیکھا جا سکتا ہے کہ نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) سے دائرہ

س = لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

تک کھینچے ہوئے مماس کا مربع = س$_1$

نوٹ۔ اوپر کے نتیجے کے لیے یہ ضروری ہے کہ لا^2 کا سر = ۱

اگر دائرے کی دی ہوئی مساوات میں لا^2 کا سر $\neq$ ۱ تو مساوات کو لا^2 کے سر پر تقسیم کرنا ہوگا۔

۵- بنیادی محور —

اس نقطے کا طریق معلوم کرو جس سے دو دیے ہوئے دائروں تک کھینچے ہوئے مماس مساوی ہوں۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے دائرے ہیں

س = لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰

سَ = لا^2 + ما^2 + ۲گَ لا + ۲فَ ما + جَ = ۰

اگر ن (لا$_1$، ما$_1$) سے اِن دائروں تک کھینچے ہوئے مماس مساوی ہوں تو ان

مماسوں کے مربعے بھی مساوی ہوں گے۔

اس لیے $\text{س}_1 = \text{س}'_1$

یعنی $\text{لا}_1^2+\text{ما}_1^2+2\text{گ}\,\text{لا}_1+2\text{ف}\,\text{ما}_1+\text{ج} = \text{لا}_1^2+\text{ما}_1^2+2\text{گ}'\,\text{لا}_1+2\text{ف}'\,\text{ما}_1+\text{ج}'$

یعنی $2\,\text{لا}_1(\text{گ}-\text{گ}')+2\,\text{ما}_1(\text{ف}-\text{ف}')+(\text{ج}-\text{ج}')=0$

اس لیے ن کے طریق کی مساوات ہے

$$2\,\text{لا}(\text{گ}-\text{گ}')+2\,\text{ما}(\text{ف}-\text{ف}')+(\text{ج}-\text{ج}')=0$$

نوٹ (۱) یہ طریق ایک خط مستقیم ہے جو دیے ہوئے دائروں کا **بنیادی محور** کہلاتا ہے۔

(۲) اگر دیے ہوئے دائرے ہم مرکز ہوں، یعنی اگر $\text{گ}=\text{گ}'$، $\text{ف}=\text{ف}'$ اور $\text{ج}\neq\text{ج}'$ تو بنیادی محور کی مساوات ہوگی

$\text{ج}-\text{ج}'=0$ یعنی صفر = مستقل

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ہم مرکز دائروں کا بنیادی محور لاتناہی پر کا خط ہے۔

(۳) آسانی کے ساتھ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ دو دائروں کا بنیادی محور ان دائروں کے نقاط تقاطع میں سے (خواہ وہ حقیقی ہوں یا خیالی) گذرتا ہے اور مرکزوں کے خط پر عمود وار ہوتا ہے۔

۶۔ دو دائروں کی مساواتیں سادہ ترین شکل میں —

اگر دو دائروں کے مرکزوں کے خط کو لا۔محور اور ان کے بنیادی محور کو ما۔محور مانا جائے تو دائروں کی مساواتیں شکل

$$\text{لا}^2+\text{ما}^2+2\text{گ}\,\text{لا}+\text{ج}=0 \quad ; \quad \text{لا}^2+\text{ما}^2+2\text{گ}'\,\text{لا}+\text{ج}=0$$

میں لکھی جا سکتی ہیں کیونکہ دائروں کے مرکز لا۔محور پر ہونے کی وجہ سے دائروں کی مساواتوں میں ما میں درجہ اول کی رقمیں نہیں ہونگی اور چونکہ مبدا بنیادی محور پر کا

نقطہ ہے اس لیے اِن دائروں کے لحاظ سے مبداء کی قوت مساوی ہوگی یعنے دونوں دائروں میں رقوم مطلق مساوی ہونگے۔

نوٹ ۔ مندرجہ بالا دائرے ایک دوسرے کو حقیقی نقطوں پر قطع کرینگے اگر ج منفی ہو اور خیالی نقطوں پر قطع کرینگے اگر ج مثبت ہو اور ایک دوسرے کو مبداء پر مس کرینگے اگر ج = ۰۔

چونکہ دو دائروں کا بنیادی محور ان کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے اس لیے بنیادی محور اور دائروں کے نقاط تقاطع حقیقی یا خیالی ہونگے بموجب اس کے کہ دائروں کے نقاط تقاطع حقیقی یا خیالی ہیں۔

۷۔ ہم محور دائرے —

فرض کرو کہ س = ۰ اور سَ = ۰ دو دیے ہوئے دائرے ہیں۔ مان لیا جاتا ہے کہ اِن مساواتوں میں سے ہر ایک میں لاَ کا سر = ۱ تب مساوات س + ک سَ = ۰ سے، جہاں ک کوئی مستقل ہے، ایک دائرہ تعبیر ہوتا ہے جو دیے ہوئے دائروں کے نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے۔ اب اگر ک کو مختلف قیمتیں دیجائیں تو دائروں کا ایک ایسا نظام حاصل ہوتا ہے کہ اس کے ہر دو رکنوں کا بنیادی محور وہی خط ہے جو دیے ہوئے دو دائروں کا بنیادی محور ہے۔ دائروں کے ایسے نظام کو جس کے ہر دو رکنوں کا بنیادی محور ایک ہی خط ہے **ہم محور دائروں کا نظام** کہتے ہیں۔

ظاہر ہے کہ ہم محور دائروں کے رکنوں کے مرکز ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو ان کے مشترک بنیادی محور پر عمود وار ہوتا ہے۔ نیز اگر نظام کے کوئی دو دائرے ایک دوسرے کو حقیقی نقطوں پر قطع کریں تو نظام کا ہر رکن اِن دو حقیقی نقطوں میں سے گزرے گا۔ ہم محور دائروں کا ایسا نظام قطع کرنے والے ہم محور دائروں کا نظام کہلاتا ہے۔

اگر نظام کے کسی دو رکنوں کے نقاط تقاطع خیالی ہوں تو یہ نظام نہ قطع کرنے والے

ہم محور دائروں کا نظام کہلاتا ہے۔

نوٹ (۱) اگر ک = -۱ تو س + ک سَ = ۰ دیے ہوئے دو دائروں کا بنیادی محور ہوتا ہے اور بنیادی محور ہم محور نظام کا وہ رکن ہے جس کا نصف قطر لامتناہی ہے۔

(۲) دائرہ س = ۰ اور خط ل = ۰ کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے کسی دائرے کی مساوات ہوگی س + ک ل = ۰ جہاں ک کوئی مستقل ہے اور ک کی مختلف قیمتوں کے جواب میں ہم محور دائروں کا ایک ایسا نظام حاصل ہوتا ہے جس کا مشترک بنیادی محور خط ل = ۰ ہے اور مرکزوں کا خط س = ۰ کے مرکز سے ل = ۰ پر عمود وار کھینچا ہوا خط ہے۔

۸ ۔ مساوات لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ج = ۰ میں ج کو برقرار رکھ کر گ کو مختلف قیمتیں دینے سے ہم محور دائروں کا ایک ایسا نظام حاصل ہوتا ہے جس کے مرکزوں کا خط لا۔ محور ہے اور مشترک بنیادی محور ما۔ محور ہے۔ اس نظام کے دائرے نہ قطع کرنے والے ہونگے اگر ج مثبت ہو اور قطع کرنے والے ہونگے اگر ج منفی ہو۔ صورت اول میں مبداء نظام کے ہر رکن کے باہر ہوگا اور صورت دوم میں مبداء نظام کے ہر رکن کے اندر ہوگا۔

اس نظام کے کسی رکن لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ج = ۰ کا مرکز نقطہ (-گ، ۰) پر ہے اور نصف قطر $\sqrt{\text{گ}^2 - \text{ج}}$ ۔ اگر ج مثبت ہو تو نصف قطر صفر ہوگا جبکہ گ = ± $\sqrt{\text{ج}}$ اور ان قیمتوں کے جواب میں نظام کے دو نقطہ دائرے حاصل ہوتے ہیں جو نقاط (± $\sqrt{\text{ج}}$ ، ۰) پر واقع ہیں۔ یہ نقطے نظام کے انتہائی نقطے کہلاتے ہیں کیونکہ ان نقطوں کو ملانے والے وقفے کے اندر نظام کے کسی حقیقی رکن کا مرکز واقع نہیں ہے۔ پس معلوم ہوا کہ نہ قطع کرنے والے ہم محور

دائروں کے نظام کے حقیقی انتہائی نقطے وجود رکھتے ہیں۔ اگر ج منفی ہو تو نظام کے حقیقی رکنوں کے نصف قطر کی اقل قیمت $\sqrt{-ج}$ ہے جو گ = ۰ کے جواب میں حاصل ہوتی ہے۔ اس رکن کی مساوات ہے

$$لا^{۲} + ما^{۲} + ج = ۰ \quad \text{یعنی} \quad لا^{۲} + ما^{۲} = (\sqrt{-ج})^{۲}$$

یہ نظام کا وہ رکن ہے جو نظام کے رکنوں کے حقیقی نقاط تقاطع کو ملانے والے وقفے کو قطر مان کر کھینچا گیا ہے۔

اسی طرح مساوات $لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ف\,ما + جَ = ۰$ سے ہم محور دائروں کا ایک ایسا نظام تعبیر ہوتا ہے جس کے مرکزوں کا خط ما۔ محور ہے اور مشترک بنیادی محور لا۔ محور ہے۔ اس نظام کے دائرے قطع کرنے والے یا نہ قطع کرنے والے ہونگے بموجب اس کے کہ جَ منفی ہے یا مثبت۔

نوٹ - آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دائروں کے ہم محور نظام کے ہر رکن کے لحاظ سے انتہائی نقطے مزدوج نقطے ہوتے ہیں۔

۹- ہم محور دائروں کے علی القوائم نظام

فرض کرو کہ ہم محور دائروں کا ایک نظام دیا گیا ہے۔ اس کے مرکزوں کے خط کو لا۔ محور اور مشترک بنیادی محور کو ما۔ محور ماننے سے نظام کی مساوات شکل $لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ\,لا + ج = ۰$ میں لی جاسکتی ہے۔ اس نظام کے انتہائی نقطے ہیں $(\pm\sqrt{ج}\,،\,۰)$۔ اِن انتہائی نقطوں میں سے گذرنے والے کسی دائرے کی مساوات ہوگی $لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ف\,ما - ج = ۰$ جہاں ف کوئی قیمت اختیار کرسکتا ہے۔ اس مساوات میں ف کو مختلف قیمتیں دینے سے دائروں کا ایک اور ہم محور نظام حاصل ہوتا ہے جس کے مرکزوں کا خط ما۔ محور ہے اور مشترک

بنیادی محور لا - محور ہے۔ دائروں کے یہ دو نظام ایسے ہیں کہ ایک نظام کا ہر رکن دوسرے نظام کے ہر رکن کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔ نیز ایک نظام کا ہر رکن دوسرے نظام کے انتہائی نقطوں میں سے (خواہ وہ حقیقی ہوں یا خیالی) گذرتا ہے۔ دائروں کے ایسے نظام، ہم محور دائروں کے **علی القوائم نظام** کہلاتے ہیں۔

ظاہر ہے کہ یہ دو نظام ایسے ہیں کہ اِن میں سے ایک کے انتہائی نقطے حقیقی ہیں اور دوسرے کے انتہائی نقطے خیالی ہیں یعنی ایک نظام کے رکن قطع کرنے والے دائرے ہوں تو دوسرے نظام (یعنی علی القوائم نظام) کے رکن نہ قطع کرنے والے ہونگے۔

مشقی سوالات

۱ - ثابت کرو کہ تین ہم مستوی دائروں میں سے دو دو کے تین بنیادی محور متراکز ہوتے ہیں۔

۲ - اس دائرے کی مساوات معلوم کرو جو ذیل کے تین دائروں میں سے ہر ایک علی القوائم قطع کرتے ہیں۔

$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} - ۷\text{لا} - ۱۲\text{ما} + ۲۴ = ۰$، $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + ۲\text{لا} - ۴\text{ما} + ۲۸ = ۰$،

$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + ۴\text{لا} - ۱۰\text{ما} + ۲۰ = ۰$

۳ - نقطہ ن اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس سے دو دیے ہوئے دائروں تک کھینچے ہوئے مماسوں کے طولوں میں ایک دی ہوئی نسبت ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک دائرہ ہے جو دیے ہوئے دو دائروں کے ساتھ ہم محور ہے۔

۴ - اگر دو دائروں میں سے ہر ایک، ایک تیسرے دائرے کو علی القوائم قطع کرے تو ثابت کرو کہ دیے ہوئے دو دائروں کا بنیادی محور تیسرے دائرے کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۵ - اس دائرے کی مساوات معلوم کرو جو ذیل کے دو دائروں کے

وترِ مشترک کو قطر مان کر کھینچا جائے۔

لا^{2} + ما^{2} + ۲لا + ۳ما + ۱ = ۰ ؛ لا^{2} + ما^{2} + ۴لا + ۳ما + ۲ = ۰

۶۔ ذیل کے دو دائروں کے انتہائی نقطوں کے محدد معلوم کرو۔

لا^{2} + ما^{2} + ۲لا + ۴ما + ۷ = ۰ ؛ لا^{2} + ما^{2} + ۴لا + ۲ما + ۵ = ۰

۷۔ اس نقطے کا طریق معلوم کرو جس سے دو دیے ہوئے دائروں تک کھینچے ہوئے مماسوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہے۔

۸۔ اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ ذیل کے دو دائرے ایک دوسرے کو مس کریں۔

لا^{2} + ما^{2} + ۲گ$_{1}$لا + ۲ف$_{1}$ما + ج$_{1}$ = ۰ ؛ لا^{2} + ما^{2} + ۲گ$_{2}$لا + ۲ف$_{2}$ما + ج$_{2}$ = ۰

(اشارہ۔ دو دائروں کے تماس کی صورت میں ان کا بنیادی محور ان کا مماس ہوتا ہے)۔

۹۔ دائروں
لا^{2} + ما^{2} + ۲گ لا + ج = ۰ ؛ لا^{2} + ما^{2} + ۲ف ما − ج = ۰ کے وترِ مشترک کا طول معلوم کرو۔

۱۰۔ اگر ایک دیے ہوئے دائرے کے لحاظ سے نقاط ن$_{1}$، ن$_{2}$ مزدوج نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ (ن$_{1}$ن$_{2}$)^{2} مساوی ہے نقاط ن$_{1}$ اور ن$_{2}$ سے دیے ہوئے دائرے تک کھینچے ہوئے مماسوں کے مربعوں کا مجموعہ۔

(ب) مکافی

۱۰۔ مکافی کا مماس ــــ ہمیں معلوم ہے کہ "م" کی ہر قیمت کے لیے

خط مستقیم $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{م}}$ مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ کو مس کرتا ہے۔ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ نقطہ تماس کے محدد $\left(\frac{\text{ا}}{\text{م}^2}،\ \frac{۲\,\text{ا}}{\text{م}}\right)$ ہیں۔ اگر $\frac{۱}{\text{م}} = \text{مہ}$ لکھیں تو نقطۂ تماس کے محدد ہوتے ہیں $(\text{ا}\,\text{مہ}^2،\ ۲\,\text{ا}\,\text{مہ})$۔ یعنی مہ کی ہر قیمت کے لیے نقطہ $(\text{ا}\,\text{مہ}^2،\ ۲\,\text{ا}\,\text{مہ})$ مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ پر واقع ہوتا ہے اور اس نقطے پر کے مماس کا میلان $= \frac{۱}{\text{مہ}}$

اوپر ہم نے متبدل "مہ" کی مدد سے مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ کے کسی نقطے کے محدد تعبیر کیے ہیں۔

اوپر کے نتیجے کی مدد سے نقطہ $(\text{لا}_1،\ \text{ما}_1)$ سے مکافی $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ تک کھینچے ہوئے مماسوں کا درمیانی زاویہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مکافی کا مماس $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{م}}$ نقطہ $(\text{لا}_1،\ \text{ما}_1)$ میں سے گذریگا

اگر $\text{ما}_1 = \text{م}\,\text{لا}_1 + \frac{\text{ا}}{\text{م}}$ یعنی اگر $\text{م}^2\,\text{لا}_1 - \text{م}\,\text{ما}_1 + \text{ا} = ۰$

یہ "م" میں درجہ دوم کی مساوات ہے۔ فرض کرو کہ اس کی اصلیں $\text{م}_1،\ \text{م}_2$ ہیں۔ تب $\text{م}_1 + \text{م}_2 = \frac{\text{ما}_1}{\text{لا}_1}$ اور $\text{م}_1\text{م}_2 = \frac{\text{ا}}{\text{لا}_1}$

$$\therefore (\text{م}_1 - \text{م}_2)^2 = (\text{م}_1 + \text{م}_2)^2 - ۴\,\text{م}_1\text{م}_2 = \frac{\text{ما}_1^2}{\text{لا}_1^2} - \frac{۴\,\text{ا}}{\text{لا}_1} = \frac{\text{ما}_1^2 - ۴\,\text{ا}\,\text{لا}_1}{\text{لا}_1^2}$$

$$\therefore |\text{م}_1 - \text{م}_2| = \frac{\sqrt{\text{ما}_1^2 - ۴\,\text{ا}\,\text{لا}_1}}{|\text{لا}_1|}$$

مماسوں کا درمیانی زاویہ فہ $= \text{مس}^{-1}\left[\left|\frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{۱ + \text{م}_1\text{م}_2}\right|\right] = \text{مس}^{-1}\,\frac{\dfrac{\sqrt{\text{ما}_1^2 - ۴\,\text{ا}\,\text{لا}_1}}{|\text{لا}_1|}}{\left|۱ + \dfrac{\text{ا}}{\text{لا}_1}\right|}$

$$= \text{مس}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\text{ما}_1^2 - ۴\,\text{ا}\,\text{لا}_1}}{|\text{لا}_1 + \text{ا}|}\right]$$

نوٹ۔ یہ مماسات علی القوائم ہونگے اگر مس فہ = ∞ یعنی اگر

لا + ا = ۰

اس لیے مکافی ما^2 = ۴ الا کے علی القوائم مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ہے لا + ا = ۰ جو مکافی کا مرتب ہے۔

۱۱۔ مکافی ما^2 = ۴ الا کے نقطہ (ا مہ^2، ۲ ا مہ) پر کے مماس کا میلان = ۱/مہ

اس لیے عماد کا میلان = - مہ اس لیے نقطہ (ا مہ^2، ۲ ا مہ) پر کے عماد کی

مساوات ہے (ما - ۲ ا مہ) = - مہ (لا - ا مہ^2)

یعنی ما + مہ لا = ۲ ا مہ + ا مہ^3

"مہ" کی ہر قیمت کے لیے خط ما + مہ لا = ۲ ا مہ + ا مہ^3 مکافی ما^2 = ۴ الا کا عماد ہوتا ہے اور عماد کے پائیں کے محدد (ا مہ^2، ۲ ا مہ) ہیں۔

عماد کی مساوات میں متبدل "مہ" تیسرے درجے میں واقع ہوتا ہے اس سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی دیے ہوئے نقطے (لا$_1$، ما$_1$) میں سے مکافی کے تین اور صرف تین عماد کھینچ سکتے ہیں۔

۱۲۔ کسی نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) سے مکافی ما^2 = ۴ الا تک کھینچے ہوئے عمادوں کے پائیں کے معینوں کا جبری مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) سے کھینچے ہوئے عمادوں کے پائیں کے متبدل، مساوات

ما$_1$ + مہ لا$_1$ = ۲ ا مہ + ا مہ^3 کی اصلیں ہیں

یعنی مساوات ا مہ^3 + مہ (۲ ا - لا$_1$) - ما$_1$ = ۰ کی اصلیں ہیں۔

اگر یہ اصلیں مہ$_1$، مہ$_2$، مہ$_3$ ہوں تو

$$م_۱ + م_۲ + م_۳ = - \frac{م۲ کا سر}{م۳ کا سر} = صفر$$

عمادوں کے پائیں معین ہیں ۲ ا م$_۱$، ۲ ا م$_۲$، ۲ ا م$_۳$

∴ (لا$_۱$، ما$_۱$) سے کھینچے ہوئے عمادوں کے پائیں کے معینوں کا جبری مجموعہ

$$= ۲ ا (م_۱ + م_۲ + م_۳) = ۰$$

۱۴ - زیر مماس اور زیر عماد

(i) مکافی ما^۲ = ۴ ا لا کے کسی نقطہ ن (ا م^۲، ۲ ا م) پر کے مماس کی مساوات ہے ما = $\frac{لا}{م}$ + ا م ۔ اگر یہ مماس لا۔محور سے ت پر ملے اور ن ع ⊥ ہے لا۔محور پر تو ت ع کو نقطہ ن کے جواب کا **زیر مماس** کہتے ہیں یکافی کا راس مبداء و پر ہے ۔ اس لیے و ع = ا م^۲

و ت کی قیمت حاصل کرنے کے لیے ہم مماس کی مساوات میں ما = ۰ درج کرتے ہیں ۔

تب ۰ = $\frac{لا}{م}$ + ا م یعنی لا = - ا م^۲ یعنی و ت = - ا م^۲

اس سے ظاہر ہے کہ ت و = و ع یعنی مکافی کے کسی زیر مماس کی تنصیف راس پر ہوتی ہے ۔

(ii) اگر مکافی کے نقطہ ن پر کا عماد لا۔محور سے گ پر ملے تو ع گ کو نقطہ ن کے جواب کا **زیر عماد** کہتے ہیں ۔ و گ کی قیمت حاصل کرنے کے لیے ہم ن پر کے عماد کی مساوات میں ما = ۰ درج کرتے ہیں ۔

تب م لا = ۲ ا م + ا م^۳ یعنی لا = ۲ ا + ا م^۲

یعنی و ع + ع گ = ۲ ا + و ع ∴ ع گ = ۲ ا

یعنی مکافی کے کسی نقطہ کے جواب کے زیر عماد کا طول مستقل ہوتا ہے اور نیم وتر خاص کے مساوی ہوتا ہے۔

۱۴۔ مکافی کا بر پیچہ —

کسی منحنی کے عمادوں کا لفاف یعنی متصل عمادوں کے نقطہ تقاطع کا طریق اس منحنی کا بر پیچہ کہلاتا ہے۔ مکافی کا بر پیچہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں مکافی کے متصل عمادوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق معلوم کرنا ہوگا۔ یعنی اس نقطۂ ن کا طریق معلوم کرنا ہوگا جس سے مکافی تک کھینچے ہوئے تین عمادوں میں سے دو عماد ایک دوسرے پر منطبق ہیں۔

فرض کرو کہ کسی ایک مقام پر ن کے محدد (لا، ما) ہیں۔ اگر (لا، ما) سے کھینچے ہوئے تین عمادوں کے پائین کے متبدل مہ، مہ، مہ ہوں تو مہ، مہ، مہ مساوات

$$ا مہ^3 + مہ (۲ ا - لا_1) - ما_1 = ۰$$ کی اصلیں ہونگی

$$\therefore\ مہ_1 + مہ_2 + مہ_3 = ۰ \qquad \text{(i)}$$

$$مہ_1 مہ_2 + مہ_2 مہ_3 + مہ_3 مہ_1 = \frac{۲ ا - لا_1}{ا} \qquad \text{(ii)}$$

$$مہ_1 مہ_2 مہ_3 = \frac{ما_1}{ا} \qquad \text{(iii)}$$

ان عمادوں میں سے دو عماد متصل ہونگے اگر

$$مہ_1 = مہ_2 \qquad \text{(iv)}$$

ان چار رشتوں میں سے مہ، مہ، مہ کو ساقط کرنے سے ن کے محددوں میں مطلوبہ رشتہ حاصل ہوتا ہے۔

(i) اور (iv) سے، $۲\,\text{مہ}_{۱} + \text{مہ}_{۲} = ۰$

(ii) اور (iv) سے، $\text{مہ}_{۱}^{۲} + \text{مہ}_{۲}(\text{مہ}_{۱} + \text{مہ}_{۲}) = \frac{۲\text{ا} - \text{لا}_{۱}}{\text{ا}}$

یعنی $\text{مہ}_{۱}^{۲} - \text{مہ}_{۲}^{۲} = \frac{۲\text{ا} - \text{لا}_{۱}}{\text{ا}}$

یعنی $\text{مہ}_{۱}^{۲} - ۴\,\text{مہ}_{۱}^{۲} = \frac{۲\text{ا} - \text{لا}_{۱}}{\text{ا}}$

یعنی $۳\,\text{مہ}_{۱}^{۲} = \frac{\text{لا}_{۱} - ۲\text{ا}}{\text{ا}}$ .... (v)

اب رشتہ (iii) سے $\text{مہ}_{۱}^{۲}\,\text{مہ}_{۲} = \frac{\text{ما}_{۱}}{\text{ا}}$

یعنی $\text{مہ}_{۱}^{۲}(-۲\,\text{مہ}_{۱}) = \frac{\text{ما}_{۱}}{\text{ا}}$ یعنی $۲\,\text{مہ}_{۱}^{۳} = \frac{-\text{ما}_{۱}}{\text{ا}}$ (vi)

(v) اور (vi) سے حاصل ہوتا ہے $\frac{۲۷\,\text{مہ}_{۱}^{۶}}{۴\,\text{مہ}_{۱}^{۶}} = \frac{\frac{(\text{لا}_{۱} - ۲\text{ا})^{۳}}{\text{ا}^{۳}}}{\frac{\text{ما}_{۱}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}} = \frac{(\text{لا}_{۱} - ۲\text{ا})^{۳}}{\text{ا}\,\text{ما}_{۱}^{۲}}$

$\therefore\ ۲۷\,\text{ا}\,\text{ما}_{۱}^{۲} = ۴(\text{لا}_{۱} - ۲\text{ا})^{۳}$

$\therefore$ ن کے طریق کی مساوات ہے $۲۷\,\text{ا}\,\text{ما}^{۲} = ۴(\text{لا} - ۲\text{ا})^{۳}$ اور یہ مکافی $\text{ما}^{۲} = ۴\text{ا}\,\text{لا}$ کے بر پیچہ کی مساوات ہے۔

۱۵۔ متوازی وتر

مکافی $\text{ما}^{۲} = ۴\text{ا}\,\text{لا}$ کے اُن وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرو جو $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا}$ کے متوازی ہیں۔

فرض کرو کہ اس نظام کے کسی ایک وتر کا نقطہ $(\text{لا}_{۱}، \text{ما}_{۱})$ ہے۔ تب اس وتر کی مساوات ہوگی

$$\text{ما}\,\text{ما}_{۱} - ۲\text{ا}(\text{لا} + \text{لا}_{۱}) = \text{ما}_{۱}^{۲} - ۴\text{ا}\,\text{لا}_{۱}$$

چونکہ یہ وتر ما = م لا کے متوازی ہے، اس لیے م = ۲ا / ما۱

∴ اس نظام کے وتروں کے وسطی نقطوں کے طریق کی مساوات ہے

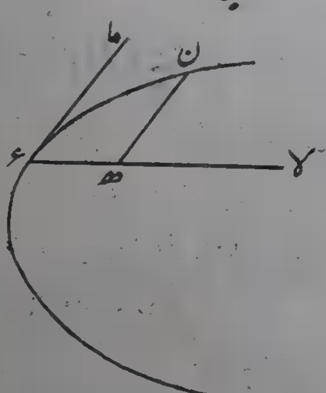
ما = ۲ا / م - یہ ایک خط مستقیم ہے - جو مکافی کے محور تشاکل کے متوازی ہے۔ مکافی کے محور تشاکل کے متوازی کھینچا ہوا کوئی خط مکافی کا ایک **قطر** کہلاتا ہے۔

یہ قطر مکافی سے نقطہ (ا / م۲ ، ۲ا / م) پر ملتا ہے اور اس نقطے پر کے مماس کی مساوات ہے

ما = م لا + ا / م یعنی یہ مماس نظام کے وتروں کے متوازی ہے۔

پس معلوم ہوا کہ مکافی کے متوازی وتروں کے نظام کے وسطی نقطوں کا طریق مکافی کا ایک قطر ہے جو ان وتروں کے متوازی مماس کے نقطۂ تماس میں سے گذرتا ہے۔

۱۶- مکافی کی مساوات جبکہ مکافی کے کسی نقطہ ع میں سے گذرنے والے قطر اور اس نقطے پر کے مماس کو حوالہ کے محور مانا جائے۔



شکل ۱۳

چونکہ مکافی مبدأ ع میں سے گذرتا ہے اس لیے مکافی کی مساوات میں رقم مطلق نہیں ہوگی - نیز چونکہ مکافی کا محور تشاکل لا - محور کے متوازی ہے اس لیے اس کی مساوات میں درجہ دوم کی صرف ایک رقم

یعنی ما² والی رقم ہوگی - اس لیے ع لا، ع ما کے لحاظ سے مکافی کی مساوات کی شکل ہوگی

ما² + ۲گ لا + ۲ف ما = ۰ .

اس مکافی کو ما - محور یعنی لا = ۰ مس کرتا ہے - اس لیے ضروری ہے کہ ف = ۰ - اس لیے مکافی کی مساوات کی شکل ہے ما² = ۴ب لا جہاں - ۲گ کی بجائے ۴ب لکھا گیا ہے -

نوٹ (۱) اس مساوات کی شکل وہی ہے جو مکافی کی معیاری مساوات کی ہے - البتہ فرق یہ ہے کہ معیاری مساوات میں حوالہ کے محور قائم ہیں اور اس مساوات میں حوالے کے محور قائم نہیں ہیں سوائے اس صورت کے جبکہ نقطہ ع مکافی کے راس پر واقع ہو - مکافی کی معیاری مساوات اس مساوات کی ایک خاص شکل ہے کیونکہ محور تشاکل اور راس پر کا مماس مکافی کے ایک نقطے میں سے گذرنے والے قطر اور اس نقطے پر کے مماس ہیں -

(۲) اگر ع لا، ع ما کا درمیانی زاویہ سہ ہو تو مساوات ما² = ۴ب لا کی مدد سے آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ مکافی کے کسی نقطہ ن سے ع لا پر کے عمود کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے ن سے ع ما پر کے عمود کا طول - اس نتیجے کا عکس حسب ذیل ہے :-

اگر ایک متحرک نقطہ ن اس طرح حرکت کرے کہ ن سے خط ل₁ پر کے عمود کا مربع ایسے بدلے جیسے ن سے خط ل₂ پر کے عمود کا طول تو نقطہ ن کا طریق ایک مکافی ہوگا جس کا ایک قطر خط ل₁ ہے اور اس قطر کے سرے پر کا مماس خط ل₂ ہوگا - اگر خط ل₁ عمود وار ہے خط ل₂ پر تو ل₁ اور ل₂ ترتیب وار مکافی کے محور تشاکل اور راس پر کے مماس ہونگے -

اگر درجہ دوم کی مساوات مکافی کو تعبیر کرے تو مندرجہ بالا نتیجہ کی مدد سے مکافی کے ضروری اجزاء معلوم کیے جاتے ہیں -

مشقی سوالات

۱ ۔ مکافی ما^2 = ۴ ا لا کے اُن مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو جن کا درمیانی زاویہ عہ ہے ۔

۲ ۔ ثابت کرو کہ مکافی کے ماسکہ سے مکافی کے کسی مماس پر کے عمود کے پائیں کا طریق مکافی کے راس پر کا مماس ہے ۔

۳ ۔ ثابت کرو کہ مکافی کے لحاظ سے کسی بیرونی نقطہ ن کا قطبی مکافی کا ایسا وتر ہے جس کی تنصیف ن میں سے گذرنے والے قطر کے ذریعہ ہوتی ہے ۔

۴ ۔ مکافی کے عمادی وتروں کے وسطی نقطوں کے طریق کی مساوات معلوم کرو ۔

۵ ۔ مکافی کے اس وتر کے سروں پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع معلوم کرو جس کے مقابل راس پر قائمہ زاویہ بنتا ہے ۔

۶ ۔ ثابت کرو کہ مکافی کے اُن وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق جو ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتے ہیں ایک اور مکافی ہے جس کا وتر خاص دیے ہوئے مکافی کے وتر خاص کا نصف ہے ۔

۷ ۔ نقطہ ن سے مکافی ما^2 = ۴ ا لا تک کھینچے ہوئے تین عماد مکافی کے محور سے ایسے نقطوں پر ملتے ہیں کہ راس سے ان کے فاصلے سلسلہ حسابیہ میں ہیں ۔ ثابت کرو کہ ن کے طریق کی مساوات حسب ذیل ہے :-

۲۷ ا ما^2 = ۲ (لا ۔ ۲ ا)^3

۸ ۔ مکافی کے نقطہ ن پر کا عماد محور سے گ پر ملتا ہے ۔ ن گ کے وسطی نقطہ کا طریق معلوم کرو ۔

۹ ۔ ثابت کرو کہ مکافی کے کسی تین مماسوں سے بننے والے مثلث کا

حائط دائرہ مکافی کے ماسکہ میں سے بھی گذرتا ہے۔

۱۰- اگر ن سے مکافی $ما^۲ = ۴ ا لا$ تک کھینچے ہوئے عمادوں میں سے دو عماد علی القوائم ہوں تو ن کے طریق کی مساوات حاصل کرو۔

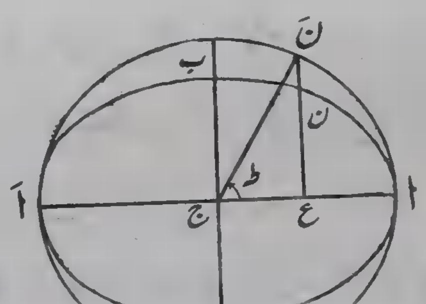
۱۱- اگر مکافی کے نقطہ ع میں سے گذرنے والے قطر اور ع پر کے مماس کے لحاظ سے مکافی کی مساوات $ما^۲ = ۴ ب لا$ ہو تو ثابت کرو کہ ب = س ع جہاں س مکافی کا ماسکہ ہے۔

(ج) ناقص

۱۷- ناقص $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ پر کے کسی نقطے کے محدد ایک متبدل کی رقوم میں —

ط کی ہر قیمت کے لیے نقطہ (ا جم ط، ب جیب ط) مندرجہ بالا ناقص پر واقع ہوتا ہے۔ متبدل "ط" کی ہندسی تعبیر حسب ذیل ہے:—

ناقص $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کے کسی نقطہ ن سے محور اعظم پر عمود ن ع نکالو۔ فرض کرو کہ ع ن ممدودہ محورِ اعظم اَ اَ کو قطر مان کر کھینچے ہوئے دائرے سے نَ پر ملتا ہے۔ ج نَ کو ملاؤ۔ اگر اجِ نَ = ط تو ن کے محدد (ا جم ط، ب جب ط) ہونگے۔



شکل ۱۴

ن کا فصلہ لا = ج ع = ج نَ جم ط = ا جم ط

ن کا معین معلوم کرنے کے لیے ناقص کی مساوات میں لا کی بجائے ا جم ط درج کرو۔

تب $\frac{\text{اُ}^2\text{جم}^2\text{طہ}}{\text{اُ}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ یعنی $\text{ما}^2 = \text{ب}^2\text{جب}^2\text{طہ}$

$\therefore \text{ما} = \text{ب جب طہ}$

نوٹ (۱) ما کی قیمت معلوم کرنے کے لیے $\text{ب}^2\text{جب}^2\text{طہ}$ کے جذر کے آگے مثبت علامت اس لیے لی گئی ہے کہ پہلے دو ربعوں کے لیے طہ صفر اور π کے درمیان واقع ہے اور طہ کی ان قیمتوں کے لیے ما مثبت ہے اور تیسرے اور چوتھے ربعوں کے لیے طہ π اور 2π کے درمیان واقع ہے اور طہ کی اِن قیمتوں کے لیے ما منفی ہے۔

(۲) طہ کو ناقص کے نقطہ ن کا **خارج المرکز زاویہ** کہتے ہیں۔

(۳) ناقص کے نقطہ ن کے جواب میں **امدادی دائرہ** پر یعنی اا َ کو قطر مان کر کھینچے ہوئے دائرہ پر جو نقطہ نَ حاصل ہوتا ہے اس کے محدد ہیں (اُ جم طہ، اُ جب طہ)۔

۱۸۔ مماس اور عماد

پہلے باب میں ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{اُ}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کے نقطہ (لاَ، ماَ) پر کے مماس اور عماد کی مساواتیں دی گئی ہیں۔ تیسرے باب کے دفعہ ۶ کی مدد سے ہم فوراً دیکھتے ہیں کہ ناقص کے نقطہ (اُ جم طہ، ب جب طہ) پر کے مماس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا جم طہ}}{\text{اُ}} + \frac{\text{ما جب طہ}}{\text{ب}} = ۱$$

اور عماد کی مساوات ہے

$$\frac{\text{اُ لا}}{\text{جم طہ}} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب طہ}} = \text{اُ}^2 - \text{ب}^2$$

۱۹- تماس کی شرط —

اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ خط لاجم عہ + ماجب عہ = ع ناقص $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$ کو مس کرے۔

فرض کرو کہ دیا ہوا خط ناقص کو نقطہ (اجم طہ، ب جب طہ) پر مس کرتا ہے۔

تب مساواتوں $\frac{لاجم\,طہ}{ا} + \frac{ماجب\,طہ}{ب} = ۱$

اور لاجم عہ + ماجب عہ = ع سے ایک ہی خط تعبیر ہوگا۔

اس لیے $\frac{جم\,عہ}{\frac{جم\,طہ}{ا}} = \frac{جب\,عہ}{\frac{جب\,طہ}{ب}} = \frac{ع}{۱}$

یعنی $جم\,طہ = \frac{اجم\,عہ}{ع}$ ؛ $جب\,طہ = \frac{ب\,جب\,عہ}{ع}$

$\because$ ۱ = جم^{۲} طہ + جب^{۲} طہ، $\therefore$ $۱ = \frac{ا^{۲}جم^{۲}عہ}{ع^{۲}} + \frac{ب^{۲}جب^{۲}عہ}{ع^{۲}}$

یعنی $ع^{۲} = ا^{۲}جم^{۲}عہ + ب^{۲}جب^{۲}عہ$ ۔ یہ تماس کی مطلوبہ شرط ہے۔

نوٹ - عہ کی ہر قیمت کے لیے خطوط

$لاجم\,عہ + ماجب\,عہ = \pm\sqrt{ا^{۲}جم^{۲}عہ + ب^{۲}جب^{۲}عہ}$

ناقص $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$ کو مس کرتے ہیں۔

۲۰- عماد کے خواص —

طہ کی ہر قیمت کے لیے خط مستقیم $\frac{ا\,لا}{جم\,طہ} - \frac{ب.ما}{جب\,طہ} = ا^{۲} - ب^{۲}$ ناقص کا

عماد ہے اور عماد کے پائیں کا خارج المرکز زاویہ "ط" ہے۔

اگر یہ عماد نقطہ (لا۱، ما۱) میں سے گذرتا ہے تو

$$\frac{\text{ا لا}_۱}{\text{جم ط}} - \frac{\text{ب ما}_۱}{\text{جب ط}} = \text{ا}^۲ - \text{ب}^۲ \quad \ldots\ldots\ldots\ (\text{ا})$$

اگر ہم لکھیں ت = مس $\frac{\text{ط}}{۲}$ تو جم ط = $\frac{۱ - \text{ت}^۲}{۱ + \text{ت}^۲}$ اور جب ط = $\frac{۲\,\text{ت}}{۱ + \text{ت}^۲}$

∴ رشتہ (ا) ہوجاتا ہے $\frac{\text{ا لا}_۱}{\frac{۱ - \text{ت}^۲}{۱ + \text{ت}^۲}} - \frac{\text{ب ما}_۱}{\frac{۲\,\text{ت}}{۱ + \text{ت}^۲}} = \text{ا}^۲ - \text{ب}^۲$ ۔

یعنی ب ما۱ ت^۴ + ۲ (ا لا۱ + ا^۲ − ب^۲) ت^۳ + ۲ (ا لا۱ − ا^۲ + ب^۲) ت − ب ما۱ = ۰

یہ مساوات "ت" میں چوتھے درجے کی ہے۔ اس لیے ت کی چار قیمتیں حاصل ہونگی۔ فرض کرو کہ ت کی چار قیمتیں ت۱، ت۲، ت۳، ت۴ ہیں۔

اگر مس $\frac{\text{ط}}{۲}$ = ت۱ تو $\frac{\text{ط}}{۲}$ = ن π + مس$^{-۱}$ ت۱

∴ ط = ۲ ن π + ۲ مس$^{-۱}$ ت۱ جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

اس رشتہ میں ن کی ہر صحیح قیمت کے جواب میں ناقص پر ایک اور صرف ایک نقطہ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح ت کی چار قیمتوں کے جواب میں ناقص پر چار اور صرف چار ایسے نقطے حاصل ہوتے ہیں جن پر کے عماد دیے ہوئے نقطہ (لا۱، ما۱) میں سے گذرتے ہیں۔ مثلاً مبداء سے ناقص تک کھینچے ہوئے عمادوں کے پائیں ہیں (ا، ۰)، (−ا، ۰)، (۰، ب) اور (۰، −ب)

۲۱۔ اگر کسی نقطہ (لا۱، ما۱) سے ناقص تک کھینچے ہوئے چار عمادوں کے پائیں کے خارج المرکز زاویے عہ، بہ، جہ، لہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ} = (۲\,\text{ن} + ۱)\,\pi$$

جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔

گذشتہ دفعہ کے بموجب مس $\frac{\text{عہ}}{۲}$ ، مس $\frac{\text{بہ}}{۲}$ ، مس $\frac{\text{جہ}}{۲}$ ، مس $\frac{\text{لہ}}{۲}$ مساوات

$$\text{ب ما}_۱\,\text{ت}^۴ + ۲\,(\text{ا لا}_۱ + \text{ا}^۲ - \text{ب}^۲)\,\text{ت}^۳ + ۲\,(\text{ا لا}_۱ - \text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)\,\text{ت} - \text{ب ما}_۱ = \text{صفر}$$

کی اصلیں ہیں ۔

$$\therefore\ \Sigma\ \text{مس}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\,\text{مس}\,\frac{\text{بہ}}{۲} = \text{صفر} \quad \text{اور} \quad \text{مس}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\,\text{مس}\,\frac{\text{بہ}}{۲}\,\text{مس}\,\frac{\text{جہ}}{۲}\,\text{مس}\,\frac{\text{لہ}}{۲} = -۱$$

$$\therefore\ ۱ - \Sigma\ \text{مس}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\,\text{مس}\,\frac{\text{بہ}}{۲} + \text{مس}\,\frac{\text{عہ}}{۲}\,\text{مس}\,\frac{\text{بہ}}{۲}\,\text{مس}\,\frac{\text{جہ}}{۲}\,\text{مس}\,\frac{\text{لہ}}{۲} = \text{صفر}$$

$$\therefore\ \text{مس}\left(\frac{\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ}}{۲}\right) = \infty$$

$$\therefore\ \frac{\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ}}{۲} = (۲\text{ن} + ۱)\,\frac{\pi}{۲}$$

$$\therefore\ \text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \text{لہ} = (۲\text{ن} + ۱)\,\pi$$

۲۲۔ ناقص پر کے ان چار نقطوں میں سے گذرنے والا قائم زائد جن پر کے عماد متراکز ہیں ۔

ناقص کے نقطہ (لا، ما) پر کے عماد کی مساوات ہے

$$\frac{\text{ا}^۲\,\text{لا}}{\text{لا}_۱} - \frac{\text{ب}^۲\,\text{ما}}{\text{ما}_۱} = \text{ا}^۲ - \text{ب}^۲$$

اگر یہ عماد نقطہ (صا، عا) میں سے گذرتا ہے تو

$$\frac{\text{ا}^۲\,\text{صا}}{\text{لا}_۱} - \frac{\text{ب}^۲\,\text{عا}}{\text{ما}_۱} = \text{ا}^۲ - \text{ب}^۲$$

یعنی ناقص پر کے وہ چار نقطے جن پر کے عماد نقطہ (صا، عا) میں سے گذرتے ہیں ذیل کی مساوات کو پورا کرتے ہیں ۔

$$\frac{\text{ا}^2\text{صا}}{\text{لا}} - \frac{\text{ب}^2\text{عا}}{\text{ما}} = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$$

یعنی یہ چار نقطے زائد (ا² - ب²) لاما + ب² عالا - ا² صاما = صفر پر واقع ہیں۔
اور یہ قائم زائد ہے کیونکہ اس کی مساوات میں لا² کا سر + ما² کا سر = صفر

۲۳۔ مرتب دائرہ —

ہمیں معلوم ہے کہ "م" کی ہر قیمت کے لیے خط ما = م لا + $\sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2}$
ناقص کو مس کرتا ہے۔ اگر یہ خط نقطہ ن (لا₁، ما₁) میں سے گذرتا ہے تو

$$\text{ما}_1 = \text{م لا}_1 + \sqrt{\text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2}$$

یعنی $(\text{ما}_1 - \text{م لا}_1)^2 = \text{ا}^2\text{م}^2 + \text{ب}^2$

یعنی $\text{م}^2(\text{لا}_1^2 - \text{ا}^2) - 2\,\text{لا}_1\text{ما}_1\text{م} + (\text{ما}_1^2 - \text{ب}^2) = 0$

اس سے ناقص کے ان دو مماسوں کے میلان حاصل ہوتے ہیں جو نقطہ (لا₁، ما₁) میں سے گذرتے ہیں۔
اگر یہ مماس علی القوائم ہوں تو اوپر کی مساوات کی دو اصلوں کا حاصل ضرب (-۱) کے مساوی ہوگا۔

یعنی $\frac{\text{ما}_1^2 - \text{ب}^2}{\text{لا}_1^2 - \text{ا}^2} = -1$ یعنی $\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$

∴ اس نقطے کے طریق کی مساوات جس سے ناقص تک علی القوائم مماس کھینچ سکتے ہیں دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$ ہے جو ناقص کا مرتب دائرہ کہلاتا ہے۔

۲۴۔ مزدوج قطر —

تیسرے باب کے دفعہ ۱۷ میں یہ بتایا جا چکا ہے کہ مرکزدار مخروطی کے

متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق مرکز میں سے گذرنے والا ایک خط یعنی قطر ہوتا ہے ۔

فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{م}_1 \, \text{لا}$ اور $\text{ما} = \text{م}_2 \, \text{لا}$ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے دو قطر ہیں ۔ اگر $\text{ما} = \text{م}_1 \, \text{لا}$ کے متوازی ایک وتر کا وسطی نقطہ $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ ہو تو اس وتر کی مساوات ہوگی $\frac{\text{لا} \, \text{لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما} \, \text{ما}_1}{\text{ب}^2} = \text{مستقل}$، لیکن یہ وتر $\text{م}_1 \, \text{لا} - \text{ما} = 0$ کے متوازی ہے ۔

$$\therefore \quad \text{م}_1 = - \frac{\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}^2}}{\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}^2}}$$

$\therefore$ $\text{ما} = \text{م}_1 \, \text{لا}$ کے متوازی کھینچے ہوئے وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق قطر $\text{ما} = - \frac{\text{ب}^2 \, \text{لا}}{\text{ا}^2 \, \text{م}_1}$ ہے ۔ اگر یہ طریق قطر $\text{ما} = \text{م}_2 \, \text{لا}$ پر منطبق ہو تو

$$\text{م}_2 = - \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2 \, \text{م}_1} \qquad \text{یعنی} \quad \text{م}_1 \, \text{م}_2 = - \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$$

یہ اس امر کی شرط ہے کہ قطر $\text{ما} = \text{م}_1 \, \text{لا}$ کے متوازی کھینچے ہوئے وتروں کے وسطی نقطے قطر $\text{ما} = \text{م}_2 \, \text{لا}$ پر ہوں ۔ یہ شرط $\text{م}_1 ، \text{م}_2$ میں متشاکل ہے جس سے ظاہر ہے کہ اس شرط کے پورا ہونے پر قطر $\text{ما} = \text{م}_2 \, \text{لا}$ کے متوازی کھینچے ہوئے وتروں کے وسطی نقطے قطر $\text{ما} = \text{م}_1 \, \text{لا}$ پر ہونگے ۔ یعنی $\text{ما} = \text{م}_1 \, \text{لا}$ اور $\text{ما} = \text{م}_2 \, \text{لا}$ ناقص کے دو ایسے قطر ہیں کہ اُن میں سے ہر ایک کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق دوسرا قطر ہے ۔ ایسے قطر مزدوج قطر کہلاتے ہیں ۔

نوٹ (۱) اگر ن ج نَ اور ق ج قَ ناقص کے مزدوج قطر ہوں تو ن اور نَ پر کے مماس قطر ق ج قَ کے متوازی ہونگے اور ق اور قَ پر کے مماس ن ج نَ کے متوازی ہونگے۔

فرض کرو کہ ن کے محدد (لا۱، ما۱) ہیں اور ق کے محدد (لا۲، ما۲) ہیں۔

تب ج ن کا میلان = $\frac{ما_1}{لا_1}$ اور ج ق کا میلان = $\frac{ما_2}{لا_2}$

چونکہ ج ن اور ج ق مزدوج قطر ہیں، اس لیے ان کے میلانوں کا

حاصل ضرب = $-\frac{ب^2}{ا^2}$

یعنی $\frac{ما_1 ما_2}{لا_1 لا_2} = \frac{-ب^2}{ا^2}$ یعنی $\frac{لا_1 لا_2}{ا^2} + \frac{ما_1 ما_2}{ب^2} =$ صفر

ن (لا۱، ما۱) پر کے مماس کی مساوات ہے $\frac{لا لا_1}{ا^2} + \frac{ما ما_1}{ب^2} = 1$

یہ مماس قطر ج ق کے متوازی ہوگا اگر ۔ $\frac{لا_1}{ما_1} \times \frac{ب^2}{ا^2} = \frac{ما_2}{لا_2}$

یعنی اگر $\frac{لا_1 لا_2}{ا^2} + \frac{ما_1 ما_2}{ب^2} = 0$

جو درست ہے ۔ پس ثابت ہوا کہ ن پر کا مماس ج ق کے متوازی ہے۔

اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ نَ پر کا مماس بھی ج ق کے متوازی ہے اور ق اور قَ پر کے مماس ن ج نَ کے متوازی ہیں۔

نوٹ (۲) مزدوج قطر دراصل مزدوج خطوں کی خاص شکل ہے کیونکہ قطر ن ج نَ کا قطب ن اور نَ پر کے مماسوں کا نقطہ تقاطع ہے اور چونکہ یہ مماسات متوازی ہیں ق ج قَ کے اس لیے ان کا نقطہ تقاطع ق ج قَ پر لاتناہی پر کا نقطہ ہے ۔ یعنی ن ج نَ کا قطب ق ج قَ پر ہے ۔ اس لیے مزدوج قطر ق ج قَ اور ن ج نَ دراصل مزدوج خط ہیں۔

نوٹ (۳) ناقص کے تشاکل کے محور دراصل مزدوج قطروں کی ایک خاص صورت ہیں۔

۲۵ - مزدوج قطروں کے سروں کے خارج المرکز زاویوں میں رشتہ —

فرض کرو کہ ن ج نَ اور ق ج قَ مزدوج قطر ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ن اور ق کے خارج المرکز زاویے ترتیب وار طہ اور فہ ہیں۔ تب ن کے محدد ہونگے (ا جم طہ، ب جب طہ) اور ق کے محدد ہونگے (ا جم فہ، ب جب فہ)۔

اس لیے ج ن اور ج ق کے میلان ہونگے (ب/ا) (جب طہ/جم طہ) اور (ب/ا) (جب فہ/جم فہ)۔ چونکہ ج ن، ج ق مزدوج قطر ہیں، اس لیے ان کے میلانوں کا حاصل ضرب = − ب²/ا²

یعنی (ب²/ا²) (جب طہ جب فہ / جم طہ جم فہ) = − ب²/ا²

یعنی جم طہ جم فہ + جب طہ جب فہ = صفر

یعنی جم (طہ ∽ فہ) = صفر یعنی ن اور ق کے خارج المرکز زاویوں کا فرق π/۲ کی طاق ضیف کے مساوی ہے۔

اس لیے اگر ن کا خارج المرکز زاویہ طہ ہو تو ق کا خارج المرکز زاویہ (طہ + π/۲)، نَ کا خارج المرکز زاویہ (طہ + π) اور قَ کا خارج المرکز زاویہ (طہ + ۳ π/۲) لیا جا سکتا ہے۔

۲۶ - ناقص کے مزدوج قطروں کے خواص —

اگر ن ج نَ اور ق ج قَ ناقص کے مزدوج قطر ہوں تو ثابت کرو کہ

(۱) ج ن² + ج ق² = ا² + ب²

(ii) Δ ن ج ق کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ ا ب

(iii) متوازی الاضلاع ن ق نَ قَ کا رقبہ = ۲ ا ب

(iv) نَ نَ، قَ، قَ پر کے مماسوں سے بننے والے متوازی الاضلاع کا رقبہ = ۴ ا ب

(v) ن ق کے وسطی نقطے کا طریق ایک ناقص ہے۔

(vi) ن اور ق پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ناقص ہے۔

(vii) ن ق اس ناقص کو مس کرتا ہے جو ن ق کے وسطی نقطے کا طریق ہے۔

(i) فرض کرو کہ ن کا خارج المرکز زاویہ ط ہے۔ تب ن کے محدد ہوں گے (ا جم ط، ب جب ط)۔ ق کا خارج المرکز زاویہ ($\frac{\pi}{2}$ + ط) ہوگا۔ اس لیے ق کے محدد ہونگے (-ا جب ط، ب جم ط)

∴ ج ن^2 + ج ق^2 = (ا^2 جم^2 ط + ب^2 جب^2 ط)
+ (ا^2 جب^2 ط + ب^2 جم^2 ط) = ا^2 + ب^2

(ii) Δ ن ج ق کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ [ا جم ط × ب جم ط - ب جب ط
(- ا جب ط)] = $\frac{1}{2}$ ا ب

(iii) اور (iv) کا ثبوت بطور مشق کے طالب علم خود لکھے۔

(v) اگر ن ق کا وسطی نقطہ ط (لاَ، ماَ) ہو تو لاَ = $\frac{ا(\text{جم ط} - \text{جب ط})}{2}$

اور ماَ = $\frac{ب(\text{جب ط} + \text{جم ط})}{2}$

∴ $\left(\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ماَ}}{\text{ب}}\right)^2$

= $\frac{\text{جم}^2\text{ط} + \text{جب}^2\text{ط} - 2\,\text{جم ط جب ط} + \text{جب}^2\text{ط} + \text{جم}^2\text{ط} + 2\,\text{جب ط جم ط}}{4} = \frac{1}{2}$

اس لیے ط کا طریق ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=\frac{1}{2}$ ہے

(vi) ن پر کے مماس کی مساوات ہے $\frac{\text{لا جم ط}}{\text{ا}}+\frac{\text{ما جب ط}}{\text{ب}}=1$

اور ق پر کے مماس کی مساوات ہے $\frac{-\text{لا جب ط}}{\text{ا}}+\frac{\text{ما جم ط}}{\text{ب}}=1$

ان دو رشتوں کی مدد سے ط کو ساقط کرنے سے ن اور ق پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کے طریق کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ ط کو ساقط کرنے کے لیے اوپر کے رشتوں کے مربعوں کا مجموعہ لو۔

تب $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=2$ یہ مطلوبہ طریق کی مساوات ہے جو ایک ناقص کو تعبیر کرتی ہے۔

(vii) وتر ن ق کی مساوات ہے

$$\frac{\text{ما}-\text{ب جب ط}}{\text{لا}-\text{ا جم ط}}=\frac{\text{ب}(\text{جب ط}-\text{جم ط})}{\text{ا}(\text{جب ط}+\text{جم ط})}$$

یعنی $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}(\text{جم ط}-\text{جب ط})+\frac{\text{ما}}{\text{ب}}(\text{جم ط}+\text{جب ط})=1$

آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=\frac{1}{2}$ کے نقطہ $\left[\frac{\text{ا}(\text{جم ط}-\text{جب ط})}{2},\ \frac{\text{ب}(\text{جم ط}+\text{جب ط})}{2}\right]$ پر کے مماس کی مساوات خط ف ق ہے۔ پس ثابت ہوا کہ ف ق ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=\frac{1}{2}$ کو مس کرتا ہے اور نقطہ تماس ف ق کا وسطی نقطہ ہے۔

۲۷۔ مساوی مزدوج قطر —

ج ن، ج ق ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔ اگر ج ن = ج ق تو ن کے محدد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ن کے محدد (ا جم طہ، ب جب طہ) ہیں۔ تب ق کے محدد ہونگے (- ا جب طہ، ب جم طہ)

چونکہ $\text{ج ن}^2 = \text{ج ق}^2$ اس لیے

$$\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{طہ} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{طہ} = \text{ا}^2\,\text{جب}^2\,\text{طہ} + \text{ب}^2\,\text{جم}^2\,\text{طہ}$$

یعنی $\text{جم}^2\,\text{طہ} = \text{جب}^2\,\text{طہ} \quad \therefore \text{طہ} = \frac{\pi}{4}$

اس لیے ن کے محدد ہیں $\left(\frac{\text{ا}}{\sqrt{2}}, \frac{\text{ب}}{\sqrt{2}}\right)$ اور ق کے محدد ہیں $\left(\frac{-\text{ا}}{\sqrt{2}}, \frac{\text{ب}}{\sqrt{2}}\right)$

اور $\text{ج ن}^2 = \frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}{2} = \text{ج ق}^2$

نوٹ ۔ ناقص میں مساوی مزدوج قطروں کا ایک اور صرف ایک ایسا جوڑا وجود رکھتا ہے کہ یہ مساوی مزدوج قطر تشاکل کے محوروں کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں۔

۲۸۔ مزدوج قطروں کے لحاظ سے ناقص کی مساوات —

اگر مرکز پر مبدا ہو تو باب ۲ دفعہ ۵ سے آسانی سے حاصل ہوتا ہے کہ ناقص کی مساوات کی شکل ہوگی $\text{ا}_1\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}_1\,\text{لا ما} + \text{ب}_1\,\text{ما}^2 = 1$ اگر حوالے کے محور مزدوج قطر ہوں تو نقطہ (لا، ما) کے جواب میں نقطہ (لا، - ما) بھی ناقص پر ہوگا۔ اس لیے ضروری ہے کہ $\text{ھ}_1 = 0$

اب فرض کرو کہ ج ن = عہ اور ج ق = بہ - تب نقاط (عہ، ۰)، (۰، بہ) ناقص پر ہونگے -

$$\therefore ا_۱ (عہ^۲) + ب_۱ (۰) = ۱ \quad \text{یعنی} \quad ا_۱ = \frac{۱}{عہ^۲}$$

$$\text{اور} \quad ا_۱ (۰) + ب_۱ (بہ^۲) = ۱ \quad \text{یعنی} \quad ب_۱ = \frac{۱}{بہ^۲}$$

∴ مزدوج قطروں کے حوالے سے ناقص کی مساوات ہوگی $\frac{لا^۲}{عہ^۲} + \frac{ما^۲}{بہ^۲} = ۱$

جہاں عہ اور بہ اُن نیم مزدوج قطروں کے طول ہیں جو لا-محور اور ما-محور پر ہیں -

نوٹ - ناقص کی معیاری مساوات دراصل مندرجہ بالا مساوات کی ایک خاص شکل ہے کیونکہ تشاکل کے محور بھی مزدوج قطروں کی ایک خاص شکل ہیں -

مشقی سوالات

۱- ناقص $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ پر کا کوئی نقطہ ن (ا جم ط، ب جب ط) ہے اور ناقص کے ماسکے س اور سَ ہیں - ثابت کرو کہ س ن + سَ ن = ۲ ا -

۲- اگر ناقص $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کے وتر ن ق کے سروں پر کے مماس علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ ف ق کے وسطی نقطے کے طریق کی مساوات ہے $\left(\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲}\right)^۲ = \frac{لا^۲ + ما^۲}{ا^۲ + ب^۲}$

۳- نقطہ $(لا_۱، ما_۱)$ سے ناقص تک کھنچے ہوئے مماسوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو -

۴- اگر ناقص کے وتر ف ق کا طول مستقل (۲ ج) کے مساوی ہو تو

ف ق کے وسطی نقطے کے طریق کی مساوات حاصل کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے لحاظ سے خطوط

$\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن} = 0$ اور $\text{لَ لا} + \text{مَ ما} + \text{نَ} = 0$ مزدوج خط ہونگے

اگر $\text{ا}^2 \,\text{ل لَ} + \text{ب}^2 \,\text{م مَ} = \text{ن نَ}$

۶۔ ثابت کرو کہ خط $\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن} = 0$ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$

کا عماد ہوگا اگر $\frac{\text{ا}^2}{\text{ل}^2} + \frac{\text{ب}^2}{\text{م}^2} = \frac{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^2}{\text{ن}^2}$

۷۔ ج ن، ج ق ناقص کے مزدوج قطر ہیں اور س، سَ ناقص کے ماسکے ہیں۔ ثابت کرو کہ $\text{س ن} \times \text{سَ ن} = \text{ج ق}^2$

۸۔ ناقص کے مزدوج قطروں کے سروں پر کے عمادوں کے نقطہ تقاطع کے طریق کی مساوات حاصل کرو۔

۹۔ ثابت کرو کہ خطوط $\text{ما} = \text{م}_1 \text{لا}$ اور $\text{ما} = \text{م}_2 \text{لا}$ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{عہ}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{بہ}^2} = 1$ کے لحاظ سے مزدوج قطر ہونگے اگر $\text{م}_1 \text{م}_2 = \frac{-\text{بہ}^2}{\text{عہ}^2}$ (ناقص کی مساوات مزدوج قطروں کے حوالے سے دی گئی ہے)۔

۱۰۔ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے اُن وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرو جن کے مقابل مرکز پر قائمہ زاویہ بنتا ہے۔

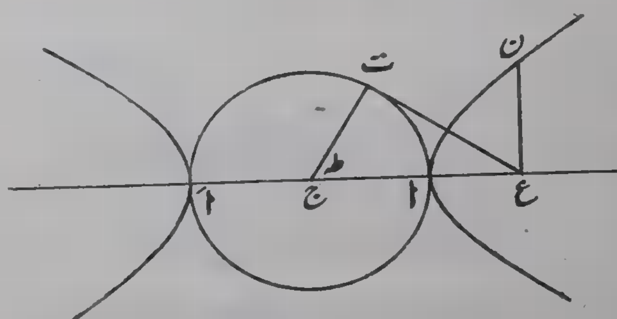
۱۱۔ اگر ناقص کے نیم محوروں کے طول ا اور ب ہوں اور نیم مزدوج قطروں کے طول عہ اور بہ ہوں اور ان مزدوج قطروں کا درمیانی زاویہ سہ ہو تو غیر متغیروں کی مدد سے ثابت کرو کہ

$$\text{عہ بہ جب سہ} = \text{ا ب} \quad \text{اور} \quad \text{عہ}^2 + \text{بہ}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$$

(د) زائد

۲۹- زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کی متبدلی تعبیر۔

ط کی ہر قیمت کے لیے نقطہ (ا قط ط، ب مس ط) زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ پر واقع ہوتا ہے۔



شکل ۱۵

فرض کرو کہ زائد پر کا کوئی نقطہ ن ہے۔ ن سے قاطع محور پر عمود ن ع نکالو۔ ع سے قاطع محور ا اَ کو قطر بنا کر کھینچے ہوئے دائرے کا مماس ع ت کھینچو۔ زاویہ ا ج ت کو ط سے تعبیر کرو۔ تب نقطہ ن کے محدد (ا قط ط، ب مس ط) ہونگے۔

نوٹ - ع سے دائرہ (ج) کے دو مماس کھینچ سکتے ہیں۔ ہمیں اس مماس کا نقطہ تماس ت لینا ہوگا جس کے جواب کے زاویہ ط کی مدد سے (ا قط ط، ب مس ط) کے ذریعہ ن کے محدد علامت کی صحت کے ساتھ تعبیر ہوتے ہیں۔

۳۰- مماس اور عماد — زائد کے نقطہ (ا قط ط، ب مس ط) پر کے

مماس کی مساوات ہے $\frac{\text{لا قط طہ}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما مس طہ}}{\text{ب}} = ۱$ اور عماد کی مساوات ہے

$$\text{ا لا جم طہ} + \text{ب ما مم طہ} = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$$

نوٹ (۱) خط لا جم عہ + ما جب عہ = ع زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کو

مس کریگا اگر $\text{ع}^2 = \text{ا}^2 \text{جم}^2 \text{عہ} - \text{ب}^2 \text{جب}^2 \text{عہ}$۔

(۲) عماد کی مساوات سے (دفعہ ۲۰ کے مماثل طریقے سے) ثابت کیا جاسکتا ہے کہ کسی دیے ہوئے نقطے سے زائد کے چار اور صرف چار عماد کھینچ سکتے ہیں۔

(۳) دفعہ ۲۲ کے طریقے سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ کسی دیے ہوئے نقطے سے زائد تک کھینچے ہوئے چار عمادوں کے پاؤں سے ایک قائم زائد گذرتا ہے۔

۱۳۱ - دفعہ ۲۳ کے طریقے سے آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ زائد کے علی القوائم مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$ ہے جو زائد کا **مرتب دائرہ** کہلاتا ہے۔

نوٹ - اگر $\text{ا}^2 > \text{ب}^2$ سے زائد کا مرتب دائرہ حقیقی ہوتا ہے۔ اگر $\text{ا}^2 = \text{ب}^2$ یعنی اگر زائد قائم زائد ہو تو مرتب دائرہ مبداء پر کا نقطہ دائرہ بن جاتا ہے۔ اس صورت میں زائد کے مرکز سے کھینچے ہوئے مماس یعنی متقارب علی القوائم ہیں۔ ان کے سوائے کوئی اور علی القوائم مماس نہیں ہیں۔

اگر $\text{ا}^2 < \text{ب}^2$ تو حقیقی علی القوائم مماس وجود نہیں رکھتے اور مرتب دائرہ خیالی ہوجاتا ہے۔

۳۲ - متقارب اور مزدوج زائد

زائد $\frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ کے متقارب ہیں $\frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۰$

اس زائد کا قاطع محور لا - محور پر ہے اور اس کا طول ۲ ا ہے اور مزدوج محور ما - محور پر ہے اور اس کا طول ۲ ب ہے - اب اگر ہم ایک اور زائد لیں جس کے قاطع اور مزدوج محور دیے ہوئے زائد کے مزدوج اور قاطع محور ہیں تو اس کی مساوات ہوگی $\frac{ما^۲}{ب^۲} - \frac{لا^۲}{ا^۲} = ۱$

یعنی $\frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = -۱$ یہ زائد دیے ہوئے زائد کے لحاظ سے **مزدوج زائد** کہلاتا ہے -

مزدوج زائد کے متقارب بھی وہی ہوں گے جو دیے ہوئے زائد کے ہیں -

زائد کی مساوات ہے $ن = \frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} - ۱ = ۰$ . . . . (۱)

متقاربوں کی مساوات ہے $ھ = \frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۰$ . . . . (۲)

مزدوج زائد کی مساوات ہے $نَ = \frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} + ۱ = ۰$ . . . . (۳)

ان مساواتوں سے ظاہر ہے کہ $ن + نَ = ۲ ھ$ . . . . (۴)

اب اگر حوالے کے محوروں کو کسی طرح بدلا جائے تو بھی رشتہ (۴) برقرار رہیگا -

اگر س = ۰ زائد کو تعبیر کرے تو (باب دوم دفعہ ۲۳ میں) ہم دیکھ چکے ہیں کہ

اس کے متقاربوں کی مساوات ہے

$$س = \frac{\Delta}{اب - ھ^2} \qquad \text{یعنی} \qquad س - \frac{\Delta}{اب - ھ^2} = ۰$$

یعنی اگر نر کا قائم مقام س ہو تو ھ کا قائم مقام $س - \frac{\Delta}{اب - ھ^2}$ ہوتا ہے۔ چونکہ $نَر = ۲ ھ - نر$

اس لیے مزدوج زائد کی مساوات ہوگی $۲ \left(س - \frac{\Delta}{اب - ھ^2}\right) - س = ۰$

یعنی $س - \frac{۲ \Delta}{اب - ھ^2} = ۰$

۳۳۔ مزدوج قطر

دفعہ ۲۴ کے طریقے سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے لحاظ سے خطوط $ما = م_1 لا$ اور $ما = م_2 لا$ مزدوج قطر ہونگے اگر $م_1 م_2 = \frac{ب^2}{ا^2}$ نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ اس شرط کے پورا ہونے پر یہی خطوط مزدوج زائد کے بھی مزدوج قطر ہونگے۔ اب فرض کرو کہ زائد پر کا کوئی نقطہ ن (ا قط طہ، ب مس طہ) ہے۔ تب ج ن کا میلان ہوگا $\frac{ب \, مس \, طہ}{ا \, قط \, طہ}$ یعنی $\frac{ب}{ا}$ جب طہ۔ چونکہ زائد کے مزدوج قطروں کے میلانوں کا حاصل ضرب $\frac{ب^2}{ا^2}$ ہے اس لیے ج ن کے جواب کے مزدوج قطر ج ق کا میلان ہوگا $\frac{ب}{ا \, جب \, طہ}$۔ اس لیے ج ق کی مساوات ہوگی $ما = \frac{لا \, ب}{ا \, جب \, طہ}$۔ یہ قطر زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ سے خیالی نقطوں پر ملتا ہے اور ان خیالی نقاط تقاطع کے محدد ہیں (خ ا مس طہ، خ ب قط طہ) اور (-خ ا مس طہ، -خ ب قط طہ)

نیز مزدوج قطر ما = ب لا / اجب طہ مزدوج زائد لا۲/ا۲ − ما۲/ب۲ = −۱ سے حقیقی نقاط (امس طہ، ب قط طہ)، (−امس طہ، −ب قط طہ) پر ملتا ہے۔

نوٹ۔ اگر زائد کے قطر ن ج نَ کے جواب کا مزدوج قطر مزدوج زائد سے ق اور قَ پر ملے تو نقاط ق اور قَ کو مزدوج قطر کے سرے کہتے ہیں۔ غور سے دیکھا جائے کہ یہ نقطے ق اور قَ زائد پر نہیں ہیں بلکہ مزدوج زائد پر ہیں۔ ج ن اور ج ق کے طولوں کو زائد کے نیم مزدوج قطروں کے طول کہتے ہیں۔

۳۴۔ زائد کے مزدوج قطروں کے خواص

اگر ن ج نَ اور ق ج قَ، زائد کے مزدوج قطر ہوں تو ثابت کرو کہ

(i) ج ن۲ − ج ق۲ = ا۲ − ب۲

(ii) Δ ن ج ق کا رقبہ = ۱/۲ ا ب

(iii) متوازی الاضلاع ن ق نَ قَ کا رقبہ = ۲ ا ب

(iv) نقاط ن، نَ، ق، قَ پر کے مماسوں سے ایک متوازی الاضلاع بنتا ہے جس کا رقبہ ۴ ا ب ہے اور اس متوازی الاضلاع کے دو راس ایک متقارب پر اور بقیہ دو راس دوسرے متقارب پر واقع ہیں۔

(v) ن ق کا وسطی نقطہ ایک متقارب پر ہوتا ہے۔

(vi) ن کے محدد ہیں (ا قط طہ، ب مس طہ) اور ق کے محدد ہیں (امس طہ، ب قط طہ)

∴ ج ن^2 - ج ق^2 = (اٗ^{2} قط^2 طہ + ب^2 مس^2 طہ)

- (اٗ^{2} مس^2 طہ + ب^2 قط^2 طہ) = اٗ^{2} - ب^2

(ii) Δ ن ج ق کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ [اب قط^2 طہ - اب مس^2 طہ] = $\frac{1}{2}$ اب

(iii) نتیجہ (ii) کی مدد سے آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔

(iv) ن اور نَ پر زائد کے مماس اور ق اور قَ پر مزدوج زائد کے مماس لیے گئے ہیں۔

ن پر کے مماس کی مساوات ہے $\frac{\text{لا قط طہ}}{\text{ا}}$ - $\frac{\text{ما مس طہ}}{\text{ب}}$ = ۱

اور نَ پر کے مماس کی مساوات ہے $\frac{\text{لا قط طہ}}{\text{ا}}$ - $\frac{\text{ما مس طہ}}{\text{ب}}$ = -۱

ق پر مزدوج زائد کے مماس کی مساوات ہے $\frac{\text{لا مس طہ}}{\text{ا}}$ - $\frac{\text{ما قط طہ}}{\text{ب}}$ = -۱

اور قَ پر کے مماس کی مساوات ہے $\frac{\text{لا مس طہ}}{\text{ا}}$ - $\frac{\text{ما قط طہ}}{\text{ب}}$ = ۱

ظاہر ہے کہ ن اور نَ پر کے مماس متوازی ہیں اور ق اور قَ پر کے مماس بھی متوازی ہیں۔ اس لیے ان چار مماسوں سے ایک متوازی الاضلاع بنتا ہے۔ صریحاً اس متوازی الاضلاع کا رقبہ متوازی الاضلاع ن ق نَ قَ کے رقبے کا دوچند ہے۔ اس لیے مطلوبہ رقبہ = ۴ اب۔

اب نقاط ن اور ق پر کے مماسوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق حاصل کرنے کے لیے ہم ان مماسوں کی مساواتوں کی مدد سے طہ کو ساقط کرتے ہیں۔

ن پر کے مماس کی مساوات ہے $\frac{\text{لا قط طہ}}{\text{ا}}$ - $\frac{\text{ما مس طہ}}{\text{ب}}$ = ۱

ق پر کے مماس کی مساوات ہے $\frac{\text{لا مس طہ}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما قط طہ}}{\text{ب}} = -۱$

اِن دونوں کو جمع کرنے سے $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)(\text{قط طہ} + \text{مس طہ}) = ۰$

یعنی $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۰$ جو ایک متقارب ہے۔

اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ نَ اور قَ پر کے مماس بھی اسی متقارب پر قطع کرتے ہیں اور ن اور قَ پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق اور نَ اور ق پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق دوسرا متقارب $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۰$ ہے۔

(vi) اگر ن ق کا وسطی نقطہ ط (لاَ، ماَ) ہو تو $\text{لاَ} = \frac{\text{ا}}{۲}(\text{قط طہ} + \text{مس طہ})$ اور $\text{ماَ} = \frac{\text{ب}}{۲}(\text{مس طہ} + \text{قط طہ})$ اس لیے $\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}} = \frac{\text{ماَ}}{\text{ب}}$۔ اس لیے ط کا طریق ہے $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۰$ جو ایک متقارب ہے۔

اسی طرح نَ قَ کے وسطی نقطے کا طریق بھی یہی متقارب ہوتا ہے۔

اور ن قَ اور نَ ق کے وسطی نقطوں کا طریق دوسرا متقارب $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۰$ ہوتا ہے۔

۲۵۔ متقاربوں کے حوالے سے زائد کی مساوات

تیسرے باب کے دفعہ ۲۳ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ زائد کی مساوات میں اور اس کے متقاربوں کی مساوات میں صرف رقم مطلق کا فرق ہوتا ہے اور متقاربوں کی مساوات خطوط کے جوڑے کی شرط کو پورا کرتی ہے۔

فرض کرو کہ زائد کے متقاربوں کو حوالے کے محور مانا گیا ہے۔ (یہ محور قائم زائد کی

صورت میں علی القوائم ہوتے ہیں)

اس لیے متقاربوں کی مساواتیں ہیں ما = ۰ اور لا = ۰

اس لیے متقاربوں کی مشترک مساوات ہے لاما = ۰

اس لیے زائد کی مساوات ہوگی لاما = ک جہاں ک مستقل ہے۔

نوٹ۔ مستقل ک کی قیمت ایک ایسی شرط کی مدد سے جس کو زائد پورا کرتا ہے معلوم کی جاسکتی ہے۔ اگر زائد ربع اول اور ربع سوم میں ہو تو ک کی قیمت مثبت ہوتی ہے۔ اور اگر زائد ربع دوم اور ربع چہارم میں ہو تو ک کی قیمت منفی ہوتی ہے۔

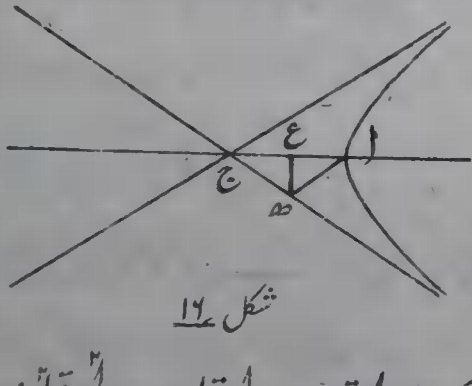
زائد لاما = ک کے مزدوج زائد کی مساوات ہے لاما = -ک

فرض کرو کہ زائد ربع اول اور ربع سوم میں واقع ہے۔ نیز فرض کرو کہ نیم قاطع محور کا طول ا ہے اور متقاربوں کا درمیانی زاویہ (۲عہ) ہے۔ تب قطعہ = ز، اور $ب^۲ = ا^۲ (ز^۲ - ۱)$ جہاں ب نیم مزدوج محور کا طول ہے۔

تب راس ا کا فصلہ = ج ھ = ج ع قطعہ = $\frac{ا}{۲}$ قطعہ

اور ا کا معین ھ ا = ج ھ = $\frac{ا}{۲}$ قطعہ

چونکہ نقطہ ا زائد لاما = ک پر ہے



شکل ۱۶

اس لیے ک = $\frac{ا}{۲}$ قطعہ × $\frac{ا}{۲}$ قطعہ = $\frac{ا^۲}{۴}$ قطعہ^۲

$$= \frac{ا^۲}{۴}(ز^۲) = \frac{ا^۲}{۴} \times \frac{ا^۲ + ب^۲}{ا^۲} = \frac{ا^۲ + ب^۲}{۴}$$

اس لیے متقاربوں کے حوالے سے زائد کی مساوات ہے $\text{لا ما} = \frac{\text{اَ}^2 + \text{ب}^2}{۴}$

اور متقاربوں کے حوالے سے مزدوج زائد کی مساوات ہوگی

$$\text{لا ما} = -\frac{\text{اَ}^2 + \text{ب}^2}{۴}$$

۳۶- (ا) اگر زائد لا ما = ک کے کسی نقطہ ن $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ پر کا مماس متقاربوں سے ف اور ق پر ملے تو ف ق کا وسطی نقطہ ن ہوتا ہے اور △ ج ف ق کا رقبہ مستقل ہوتا ہے۔

ن $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ پر کے مماس کی مساوات ہے

$$\text{لا ما}_1 + \text{لا}_1\text{ما} = ۲\text{ک} = ۲\,\text{لا}_1\text{ما}_1$$

یعنی

$$\frac{\text{لا}}{۲\,\text{لا}_1} + \frac{\text{ما}}{۲\,\text{ما}_1} = ۱$$

یہ مماس حوالے کے محوروں پر (یعنی متقاربوں پر) طول $۲\,\text{لا}_1$، $۲\,\text{ما}_1$ والے مقطوعے قطع کرتا ہے۔ اس لیے ف کے محدد ہیں $(۲\,\text{لا}_1، ۰)$ اور ق کے محدد ہیں $(۰، ۲\,\text{ما}_1)$۔

اس لیے ف ق کا وسطی نقطہ ن $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ ہے۔

$$\triangle \text{ ج ف ق کا رقبہ} = \frac{۱}{۲}\text{جب}\,۲\text{ع}\,(۲\,\text{لا}_1 \times ۲\,\text{ما}_1) = ۲\,\text{جب}\,۲\text{ع} \times \text{لا}_1\text{ما}_1$$

$= ۲\text{ک}\,\text{جب}\,۲\text{ع}$ جو مستقل ہے ن کے ہر مقام کے لیے۔

(ii) زائد کا ایک وتر $\text{ن}_1\text{ن}_2$ متقاربوں سے $\text{ق}_1\text{ق}_2$ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\text{ن}_1\text{ن}_2$ کا وسطی نقطہ وہی ہے جو $\text{ق}_1\text{ق}_2$ کا ہے۔

متقاربوں کے حوالہ سے زائد کی مساوات ہوگی لا ما = ک

فرض کرو کہ وتر ن۱ن۲ کا وسطی نقطہ (لا۱، ما۱) ہے -
تب وتر ن۱ن۲ کی مساوات ہوگی

لا ما۱ + لا۱ ما - ۲ک = ۲ لا۱ ما۱ - ۲ک

یعنی لا/۲لا۱ + ما/۲ما۱ = ۱ جس سے ظاہر ہے کہ ق۱ق۲ کا وسطی نقطہ بھی (لا۱، ما۱) ہے -

(iii) ثابت کرو کہ زائد کے کسی نقطہ سے زائد کے متقاربوں پر کے عمود کا حاصل ضرب مستقل ہے -
فرض کرو کہ متقاربوں کا درمیانی زاویہ ۲ عہ ہے اور متقاربوں کے حوالے سے زائد کی مساوات ہے لا ما = ک
فرض کرو کہ زائد پر کا کوئی نقطہ ن (لا۱، ما۱) ہے - ن سے و لا پر کا عمود = ما۱ جب ۲ عہ
اور ن سے و ما پر کا عمود = لا۱ جب ۲ عہ
∴ اِن عمودوں کا حاصل ضرب = لا۱ ما۱ (جب ۲ عہ)^۲ = ک جب^۲ ۲ عہ
جو مستقل ہے -

مشقی سوالات

۱ - زائد کے ماسکے س اور سَ ہیں اور زائد پر کا کوئی نقطہ ن ہے - ثابت کرو کہ س ن اور سَ ن کا فرق مساوی ہے ۲ ا جہاں ۲ ا زائد کے قاطع محور کا طول ہے -

۲ - اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ زائد لا^۲/ا^۲ - ما^۲/ب^۲ = ۱ کے لحاظ سے خطوط ل۱ لا + م۱ ما + ن۱ = ۰ اور ل۲ لا + م۲ ما + ن۲ = ۰ مزدوج خطوط ہوں -

۳ - زائد (ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱) (ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲) = د کے

متقاربوں کی مساوات اور مزدوج زائد کی مساوات معلوم کرو۔

۴ - ثابت کرو کہ زائد کے مساوی مزدوج قطر متقارب کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں۔

۵ - اگر ج ن، ج ق قائم زائد کے مزدوج قطر ہوں تو ثابت کرو کہ ج ن = ج ق ۔

۶ - مساوات (ا لا + ب ما + ج) (ب لا - ا ما + د) = ا² + ب² کی تعبیر بیان کرو۔

۷ - ثابت کرو کہ زائد کے متقاربوں میں سے کسی ایک پر کے کسی نقطہ کا قطبی اسی متقارب کے متوازی ہوتا ہے۔

۸ - ایک دائرہ ایک قائم زائد کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ زائد کے مرکز سے اِن چار نقطوں کے فاصلے کے مربعوں کا مجموعہ دائرہ کے قطر پر کے مربع کے مساوی ہوتا ہے۔

۹ - قائم زائد لا ما = ک² اور مکافی ما² = ۴ ا لا کے نقطہ تقاطع پر زائد اور مکافی کے مماس لا-محور سے ترتیب وار زاویے طہ اور فہ بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مس طہ = - ۲ مس فہ

۱۰ - قائم زائد کے متوازی وتروں کا ایک نظام دیا گیا ہے۔ اگر اِن وتروں کو قطر مان کر دائرے کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ دائروں کا ایک ہم محور نظام حاصل ہوتا ہے۔

پانچواں باب

مخروطی تراش کی قطبی مساوات

۱۔ کارتیزی مساوات سے قطبی مساوات حاصل کرنا—

کارتیزی مساوات میں $\text{لا} = \text{ر}\,\text{جم}\,\text{طہ}$ اور $\text{ما} = \text{ر}\,\text{جب}\,\text{طہ}$ درج کرنے سے قطبی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کی قطبی مساوات $\text{ر}^2 \left[\frac{\text{جم}^2\,\text{طہ}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{جب}^2\,\text{طہ}}{\text{ب}^2} \right] = 1$ ہے جب کہ قطب مرکز پر ہو۔ اور ابتدائی خط لا۔محور پر۔ اگر محور اعظم کا میلان ابتدائی خط سے عہ ہو تو مساوات

$$\frac{\text{ر}^2\,\text{جم}^2\,(\text{طہ}-\text{عہ})}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ر}^2\,\text{جب}^2\,(\text{طہ}-\text{عہ})}{\text{ب}^2} = 1$$ ہوگی۔

اسی طرح دائرہ کی قطبی مساوات $\text{ر} = \text{ا}$، مکافی $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا}\,\text{لا}$ کی قطبی مساوات $\text{ر}\,\text{جب}^2\,\text{طہ} = 4\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{طہ}$، زائد کی قطبی مساوات $\text{ر}^2 \left[\frac{\text{جم}^2\,\text{طہ}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{جب}^2\,\text{طہ}}{\text{ب}^2} \right] = 1$، اور خط مستقیم کی قطبی مساوات $\text{ا}\,\text{جم}\,\text{طہ} + \text{ب}\,\text{جب}\,\text{طہ} = \frac{\text{ک}}{\text{ر}}$ حاصل ہوتی ہے۔

نوٹ۔ یہ مساواتیں زیادہ کارآمد نہیں ہیں۔ مخروطیوں کی قطبی

مساواتیں زیادہ تر اس صورت میں کارآمد ہوتی ہیں جب کہ ایک ماسکہ پر قطب لیا جائے۔

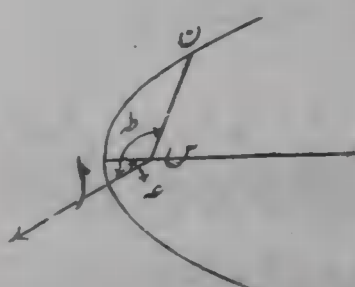
۲ - قطبی مساوات جبکہ ماسکہ پر قطب ہو ــــ

مخروطی تراش کی قطبی مساوات معلوم کرنا ہے جبکہ ماسکہ پر قطب ہو اور اس میں سے گذرنے والے محور کو ابتدائی خط مانا جائے۔

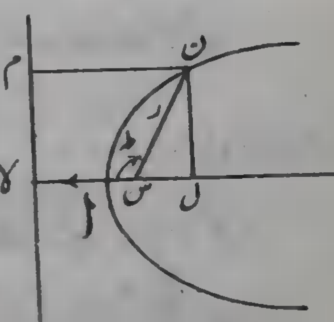
شکل ۱۷ میں س ماسکہ اور م لا مرتب ہے۔

ماسکہ س کو قطب اور س سے مرتب پر کے عمود س لا کو ابتدائی خط مانا گیا ہے۔

ن کے قطبی محدد (ر، ط) ہیں۔



شکل ۱۸



شکل ۱۷

مخروطی تراش کی تعریف کی رو سے

ر = س ن = ز × ن م = ز × ل لا ، جہاں ن ل ⊥ لا س پر۔

= ز (لا س + س ل)

= ل + ز ر جم (π - ط) = ل - ز ر جم ط

جہاں ل نیم وترخاص کا طول ہے۔

$\therefore$ ر (۱ + زجم ط) = ل یعنی $\frac{ل}{ر}$ = ۱ + زجم ط ...... (i)

اگر ابتدائی خط س میں سے گذرنے والے محور سے زاویہ عہ بنائے (شکل ۱۸) تو مطلوبہ مساوات ہوگی

$\frac{ل}{ر}$ = ۱ + زجم (ط - عہ) .... (ii)

نوٹ (۱) اگر مخروطی مکافی ہو تو ز = ۱، اس لیے اس کی مساوات ہوگی

$\frac{ل}{ر}$ = ۱ + جم ط یعنی $\frac{ل}{۲ر}$ = جم^{۲} $\frac{ط}{۲}$ .... (iii)

(۲) چونکہ جم (ط) = جم (۲ π - ط) اس لیے معلوم ہوتا ہے کہ

مخروطی $\frac{ل}{ر}$ = ۱ + زجم ط ابتدائی خط کے لحاظ سے متشاکل ہے۔

۳ - مخروطی $\frac{ل}{ر}$ = ۱ + زجم ط پر نقطہ (ر، ط) کے مقام کی تبدیلی جبکہ ط بدلے

(i) اگر ز = ۱ تو مخروطی مکافی ہے $\frac{ل}{ر}$ = ۱ + جم ط،

راس ا پر ط = ۰ ؛ $\therefore$ ر = $\frac{ل}{۲}$

جیسے جیسے ط بڑھتا ہے صفر سے π تک (۱ + جم ط) گھٹتا ہے یعنی

$\frac{ل}{ر}$ گھٹتا ہے یعنی ر بڑھتا ہے۔

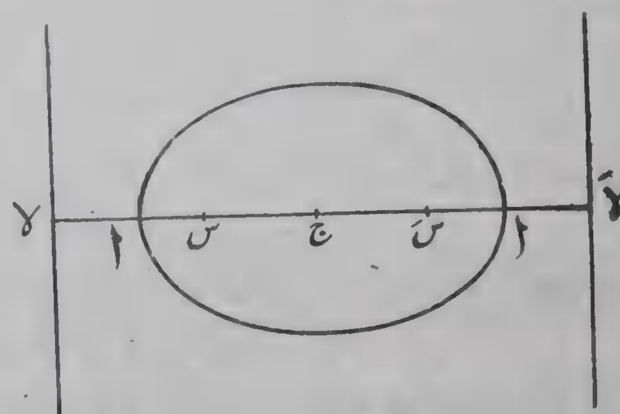
ط = π ہو تو ر لامتناہی ہوتا ہے۔ اگر ط بڑا ہو π سے تو

(۱ + جم ط) بڑھتا ہے حتیٰ کہ ط = ۲π کے لیے ر = $\frac{ل}{۲}$۔ منحنی اس کی

سمت میں لامتناہی کی طرف پھیلتا ہے۔

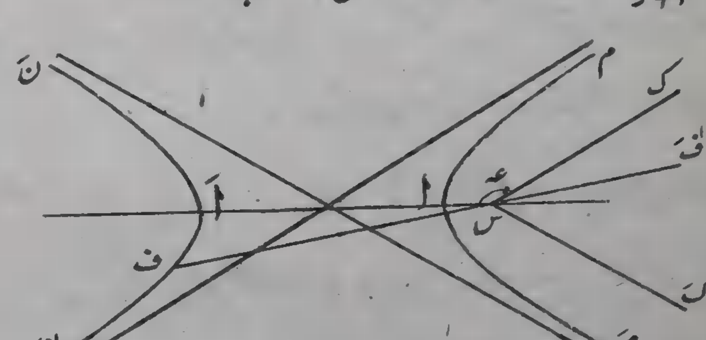
(ii) ز > ۱ تو مخروطی ناقص ہے۔ نقطہ ا پر ط = ۰، ر = $\frac{ل}{۱+ز}$

جیسے ط بڑھتا ہے ر بھی بڑھتا ہے۔ ط = π کے لیے ر = $\frac{ل}{۱-ز} > ۰$۔
اس لیے مخروطی محور کو پھر اَ پر قطع کرتا ہے اس طرح کہ س اَ = $\frac{ل}{۱-ز}$
جب، π < ط < ۲π، جم ط بڑھتا ہے اور ر کی قیمت $\frac{ل}{۱-ز}$ سے $\frac{ل}{۱+ز}$ تک گھٹتی ہے۔ ناقص بند منحنی ہے۔



شکل ۱۹

(iii) ز > ۱ تو مخروطی زائد ہے۔ ر = $\frac{ل}{۱+ز جم ط}$؛ ط = ۰ کے لیے ر = $\frac{ل}{۱+ز}$ جس سے نقطہ ا حاصل ہوتا ہے۔



شکل ۲۰

(۱) جیسے جیسے ط بڑھتا ہے جم ط بتدریج کم ہوتا ہے اور ر بڑھتا ہے حتیٰ کہ ر لاتناہی ہوتا ہے جبکہ ۱ + زجم ط = ۰ ط کی اس قیمت کے جواب میں اس ک = عہ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح ہمیں دائیں جانب کی شاخ پر کا حصہ ا م حاصل ہوتا ہے۔

(۲) اگر زاویہ ط کیقدر بڑا ہو عہ سے تو ۱ + زجم ط ایک نہایت قلیل منفی مقدار کے مساوی ہے اور ر ایک بڑی منفی مقدار کے مساوی ہو جاتا ہے لہذا نقطہ بائیں طرف کی شاخ کے نچلے حصے پر بہت دور واقع ہوتا ہے۔ ط = π کے لیے ر = $\frac{ل}{ز - ۱}$ = س اَ یعنی جب زاویہ ط زاویہ عہ سے بڑھتے بڑھتے π کی طرف جاتا ہے تو ہمیں بائیں طرف کی شاخ کا حصہ ن اَ حاصل ہوتا ہے۔

(۳) اگر زاویہ ط بدلے π سے (۲π - عہ) تک تو متحرک نقطہ بائیں جانب کی شاخ کا حصہ اَ نَ مرتسم کرتا ہے۔

(۴) اگر زاویہ ط بدلے (۲π - عہ) سے ۲π تک تو دائیں جانب کی شاخ کا حصہ مَ ا مرتسم ہوتا ہے اور ط = ۲π کے لیے متحرک نقطہ پھر ا پر واپس آجاتا ہے۔

۴۔ وتر، مماس اور عماد کی مساواتیں

مخروطی $\frac{ل}{ر}$ = ۱ + زجم ط پر کے دو نقطوں کے سمتی زاویے (عہ + بہ)، اور (عہ - بہ) ہیں۔ ان نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات مطلوب ہے۔

خط مستقیم $\frac{ل}{ر}$ = اجم ط + ب جم (ط - عہ) کی مساوات میں دو اختیاری مستقل ا، ب ہیں۔ اگر یہ خط نقاط (عہ + بہ)، (عہ - بہ) سے گذرے تو

$\frac{ل}{ر}$ = ۱ + زجم (عہ - بہ) = اجم (عہ - بہ) + ب جم بہ

یعنی ۱ + ز جم (عہ ـ بہ) = اُ جم (عہ ـ بہ) + بَ جم ،

اسی طرح ۱ + ز جم (عہ + بہ) = اُ جم (عہ + بہ) + بَ جم ،

حل کرنے سے اُ = ز اور بَ = قط بہ اور اُ، بَ کی قیمتوں کو درج کرنے سے مطلوبہ وتر کی مساوات حاصل ہوتی ہے جو حسب ذیل ہے۔

ل/ر = ز جم طہ + قط بہ جم (طہ ـ عہ) ...... (ا)

اگر مخروطی کی مساوات ل/ر = ۱ + ز جم (طہ ـ جہ) ہو تو وتر کی مساوات ہوگی ل/ر = ز جم (طہ ـ جہ) + قط بہ جم (طہ ـ عہ) جو مساوات (ا) میں عہ، طہ کے بجائے (ا) میں (عہ ـ جہ) اور طہ ـ جہ لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

مماس کی مساوات۔ وتر کی مساوات میں بہ = ۰ رکھنے سے نقطہ عہ پر کے مماس کی مساوات ل/ر = ز جم طہ + جم (طہ ـ عہ) حاصل ہوتی ہے۔

عماد کی مساوات کی شکل ہے ک ل/ر = ز جم (طہ + π/۲) + جم (π/۲ + طہ ـ عہ)

= ـ ز جب طہ ـ جب (طہ ـ عہ)

لیکن عماد مخروطی کے نقطہ (ر، عہ) میں سے گذرتا ہے۔

ک کو اس طرح لو کہ وہ (ر، طہ) سے گذرے جہاں طہ = عہ اور ل/ر = ۱ + ز جم عہ سے ر ملتا ہے۔

∴ ل/ر = ۱ + ز جم عہ اور ک ل/ر = ـ ز جب عہ

اس لیے ک (۱ + ز جم عہ) = ز جب عہ ۔ اس لیے عماد کی مساوات

(ز جب عہ)/(۱ + ز جم عہ) × ل/ر = ز جب طہ + جب (طہ ـ عہ) ہے۔

نوٹ - اگر مخروطی کی مساوات ل/ر = ۱ + ز جم (طہ - جہ) ہو تو نقطہ طہ = عہ پر کے مماس کی مساوات کے لیے اوپر کی مساوات میں عہ، طہ کے بجائے عہ - جہ اور طہ - جہ رکھو - مماس کی مساوات ہوگی

ل/ر = ز جم (طہ - جہ) + جم (طہ - عہ)

اور عماد کی مساوات ہوگی

[ز جب (عہ - جہ) / (۱ + ز جم (عہ - جہ))] × ل/ر = ز جب (طہ - جہ) + جب (طہ - عہ)

۵ - متقارب —

مخروطی ل/ر = ۱ + ز جم طہ کے متقارب معلوم کرنا -
نقطہ طہ = عہ پر کے مماس کی مساوات

ل/ر = ز جم طہ + جم (طہ - عہ) ہے .... (۱)

اگر ر ← ∞ یعنی اگر نقطہ تماس لاتناہی پر ہو تو

۰ = ۱ + ز جم عہ .... (۲)

مساواتوں (۱)، (۲) سے عہ کو ساقط کرنے سے متقارب کی مساوات حاصل ہوتی ہے -

(۱) سے ل/ر = ز جم طہ + جم طہ جم عہ + جب طہ جب عہ

= جم طہ (ز - ۱/ز) ± √(۱ - ۱/ز²) جب طہ

یعنی ز ل/ر = (ز² - ۱) جم طہ ± جب طہ √(ز² - ۱)

مشقی سوالات

۱ - ثابت کرو کہ مخروطی کے کسی ماسکی وتروں کے حصوں کا موسیقی اوسط نیم وتر خاص کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ن س ق ماسکی وتر ہے، ن کا سمتی زاویہ ط ہے اور ق کا سمتی زاویہ (π + ط) ہے۔

$$\therefore \frac{\text{ل}}{\text{س ن}} = \text{۱} + \text{زجم ط} \;;\; \frac{\text{ل}}{\text{س ق}} = \text{۱} + \text{زجم}(\pi + \text{ط}) = \text{۱} - \text{زجم ط}$$

$$\frac{\text{ل}}{\text{س ن}} + \frac{\text{ل}}{\text{س ق}} = \text{۲} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{۱}}{\text{س ن}} + \frac{\text{۱}}{\text{س ق}} = \frac{\text{۲}}{\text{ل}}$$

۲ - اگر ایک مکافی کے دو ماسکی وتر ن س نَ اور ق س قَ علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(\text{i}) \quad \frac{\text{۱}}{\text{ن نَ}} + \frac{\text{۱}}{\text{ق قَ}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲ل}} \text{ ۔}$$

(ii) اگر مخروطی کے کوئی دو ماسکی وتر ن نَ اور ق قَ ہوں تو

$$\frac{\text{۱}}{\text{ن نَ}} + \frac{\text{۱}}{\text{ق قَ}} = \frac{\text{۲} - \text{خ}^{\text{۲}}}{\text{۲ل}} \text{ ۔}$$

۳ - کسی نقطے سے مخروطی کے مماس کھینچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ ان کے مقابل ماسکہ پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

۴ - مماس کے اس حصے کے مقابل جو نقطہ تماس اور مرتب کے درمیان قطع ہوتا ہے ماسکہ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۵ - اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ خط $\frac{\text{ل}}{\text{ر}} = \text{ا جم ط} + \text{ب جب ط}$

مخروطی $\frac{ل}{ر}$ = ۱ + زجم طہ کا مماس ہو۔

۶ ـ مخروطی کے نقطہ ن کا سمتی زاویہ عہ ہے۔ ن پر کے مماس پر کا کوئی نقطہ ت ہے جس کے محدد (ر، طہ) ہیں، ت م عمود ہے س ن پر اور ت ل مرتب پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ س م = ز × ت ل جہاں س ماسکہ اور ز خروج المرکز ہے۔ (مماس کی مساوات کی ہندسی تعبیر سے اوپر کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے جسے آدم کا مسئلہ کہتے ہیں)۔

چھٹا باب

مخروطی تراشوں کو مرتسم کرنا

۱- مخروطی کی نوعیت

تیسرے باب میں ثابت کیا گیا ہے کہ عام مساوات درجہ دوم س = ۰ ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے۔ اعادہ کے لیے ذیل میں مخروطی کی نوعیت کے متعلق قائم محوروں کی صورت میں حاصل کیے ہوئے نتائج درج کیے جاتے ہیں۔

(i) اب - ھ^{2} > ۰ تو مخروطی ناقص ہے۔ اس کے متقارب خیالی ہیں۔
اگر ا = ب، ھ = ۰، تو مخروطی دائرہ ہے۔

(ii) اب - ھ^{2} < ۰ تو مخروطی زائد ہے۔ اس کے متقارب حقیقی ہیں۔
اگر ا + ب = ۰ ہو تو قائم زائد ہے۔
اس صورت میں جبکہ Δ = ابج + ۲ف گ ھ - اف^{2} - ب گ^{2} - ج ھ^{2} = ۰،
دو متقاطع خطوط حاصل ہوتے ہیں۔

(iii) اب - ھ^{2} = ۰ تو مخروطی تراشش مکافی ہے۔ اس کے متقارب منطبق ہوتے ہیں
اگر اس کے ساتھ Δ بھی صفر ہو تو دو متوازی یا منطبق خطوط تعبیر ہوتے ہیں۔

(iv) اگر Δ = ۰ تو دو حقیقی یا خیالی خطوط حاصل ہوتے ہیں۔

۲ - عام مساوات کی تحویل جبکہ $اب \neq ھ^2$

(i) **مرکز معلوم کرنا۔** تیسرے باب میں یہ بھی ثابت کیا جا چکا ہے کہ مخروطی س = ۰ کا مرکز $(لا_1، ما_1)$ مساواتوں $الا_1 + ھما_1 + گ = ۰$ اور $ھلا_1 + ب ما_1 + ف = ۰$ کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ

$$لا_1 = \frac{ھف - بگ}{اب - ھ^2}،\quad ما_1 = \frac{گھ - اف}{اب - ھ^2}$$

۔ $(لا_1، ما_1)$ محدود ہیں کیونکہ $اب \neq ھ^2$

(ii) **مبداء مرکز پر۔** مبداء کو مرکز پر منتقل کرنے سے $لا = لا_1 + لا'$، $ما = ما_1 + ما'$ [جہاں (لا، ما) ابتدائی محدد اور $(لا'، ما')$ نئے محدد ہیں]۔ مساوات کی تحویل شدہ شکل $ا(لا' + لا_1)^2 + ۲ھ(لا' + لا_1)(ما' + ما_1) + \ldots = ۰$ ہے۔

مختصر کرنے سے

$$ا لا'^2 + ۲ھ لا' ما' + ب ما'^2 + ۲ لا' (الا_1 + ھما_1 + گ) + ۲ ما'(ھلا_1 + ب ما_1 + ف) + لا_1(الا_1 + ھما_1 + گ) + ما_1(ھلا_1 + ب ما_1 + ف) + گ لا_1 + ف ما_1 + ج = ۰$$

$(لا_1، ما_1)$ کی قیمتیں درج کرکے زبروں کو حذف کرنے سے،

$$ا لا^2 + ۲ھ لاما + ب ما^2 + \frac{\Delta}{اب - ھ^2} = ۰$$

پس مبداء کو مرکز پر لینے سے درجہ دوم کی عام مساوات شکل

$$ا لا^2 + ۲ ھ لاما + ب ما^2 = ا$$

میں لائی جا سکتی ہے بشرطیکہ $اب \neq ھ^2$ اور $\Delta \neq ۰$

(iii) محوروں کے طول اور مساواتیں معلوم کرنا۔

مخروطی $\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{لاما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 = 1$ اور دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ر}^2$ کے نقاط تقاطع کو مبداء سے ملانے والے خطوں کی مشترک مساوات

$$\text{لا}^2\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ر}^2}\right) + 2\,\text{ھ}\,\text{لاما} + \text{ما}^2\left(\text{ب} - \frac{1}{\text{ر}^2}\right) = 0 \quad \text{ہے}$$

اگر ر کسی نیم محور کے طول کے مساوی ہو تو یہ دونوں خطوط اس محور پر منطبق ہوتے ہیں۔ خطوط منطبق ہونگے اگر

$$\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ر}^2}\right)\left(\text{ب} - \frac{1}{\text{ر}^2}\right) = \text{ھ}^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

یعنی اگر $\frac{1}{\text{ر}^4} - \frac{1}{\text{ر}^2}(\text{ا} + \text{ب}) + \text{اب} - \text{ھ}^2 = 0$، اس کو حل کرنے سے $\frac{1}{\text{ر}^2}$ کی دو قیمتیں حاصل ہوں گی۔ فرض کرو کہ یہ $\frac{1}{\text{ر}_1^2}$ اور $\frac{1}{\text{ر}_2^2}$ ہیں۔ تب مخروطی کے نصف محوروں کے مربعے ہونگے ر_1^2 اور ر_2^2۔ پس ایک محور کی مساوات کا مربع

$$\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ر}_1^2}\right)\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{لاما} + \left(\text{ب} - \frac{1}{\text{ر}_1^2}\right)\text{ما}^2 = 0$$

ہے۔ اس کو $\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ر}_1^2}\right)$ سے ضرب دو اور (۱) کو استعمال کرو۔

تب $$\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ر}_1^2}\right)^2\text{لا}^2 + 2\,\text{ھ}\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ر}_1^2}\right)\text{لاما} + \text{ھ}^2\,\text{ما}^2 = 0$$

یعنی $$\left\{\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ر}_1^2}\right)\text{لا} + \text{ھ}\,\text{ما}\right\}^2 = 0$$

پس ایسے محور کی مساوات جس کے نصف کا طول ر_1 ہے

$$\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ر}_1^2}\right)\text{لا} + \text{ھ}\,\text{ما} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

اسی طرح دوسرے محور کی مساوات ہے $\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ر}_2^2}\right)\text{لا} + \text{ھ}\,\text{ما} = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ (۲) اور (۳) ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں۔

پس مرکز دار مخروطیوں کو مرتسم کرنے کے لیے حسب ذیل طریقہ اختیار کیا جاتا ہے:۔

(۱) مخروطی کی نوعیت معلوم کرو۔

(۲) مرکز معلوم کرو اور مبداء کو مرکز پر منتقل کر کے مخروطی کی نئی مساوات معلوم کرو۔

(۳) نصف محوروں کے طول اور مساواتیں معلوم کرو۔

(۴) زائد کی صورت میں متقارب معلوم کرو۔

(۵) ترسیم میں مزید سہولت کے لیے ابتدائی مساوات میں لا = ۰ اور ما = ۰ رکھنے سے حوالے کے محوروں سے مخروطی کے نقاط تقاطع (حقیقی یا خیالی) معلوم کرو۔

نوٹ۔ بعض اوقات زائد کی مساوات کے صرف معائنہ سے متقارب معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ مثلاً (لا + ۳ ما) (لا + ۲ ما + ۱) = ۴ میں متقارب (لا + ۳ ما) = ۰ اور (لا + ۲ ما + ۱) = ۰، کیونکہ ان کی مشترک مساوات اور منحنی کی مساوات میں صرف مستقل ۴ کا فرق ہے۔ نیز جب مساوات میں لا۲ اور ما۲ والی رقمیں موجود نہ ہوں تو بھی یہ طریقہ استعمال ہو سکتا ہے۔ مثلاً لاما + ۲لا - ما + ۴ = ۰ یعنی (لا - ۱) (ما + ۲) + ۶ = ۰ میں متقارب لا - ۱ = ۰ اور ما + ۲ = ۰ ہیں۔

مثال (۱) ۵ لا۲ + ۵ ما۲ - ۶ لاما + ۱۸ لا - ۱۴ ما + ۹ = ۰ کے ضروری اجزاء معلوم کر کے مخروطی کو مرتسم کرو۔

(i) نوعیت:۔ ۲۵ - ۹ > ۰۔ اس لیے مخروطی ناقص ہے۔

(ii) مرکز (لا۱، ما۱): ۵ لا۱ - ۳ ما۱ + ۹ = ۰، -۳ لا۱ + ۵ ما۱ - ۷ = ۰ کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ مرکز (- ۳/۲ ، ۱/۲) ہے۔

(iii) مرکز کو مبداء قرار دینے سے مساوات کی تحویل شدہ شکل

۵ لا۲ + ۵ ما۲ − ۶ لا ما + ۹ (−۳/۲) − ۷ (۱/۲) + ۹ = ۰

یعنی　۵/۸ لا۲ − ۳/۴ لا ما + ۵/۸ ما۲ = ۱　ہے۔

(iv) محوروں کے طول اور مساواتیں :-

(۵/۸ − ۱/ر۲)۲ = (−۳/۸)۲ = ۹/۶۴

∴　۵/۸ − ۱/ر۲ = ± ۳/۸　　　∴ ر۲ = ۴، ۱

نصف محوروں کے طول ۲، ۱ ہیں۔

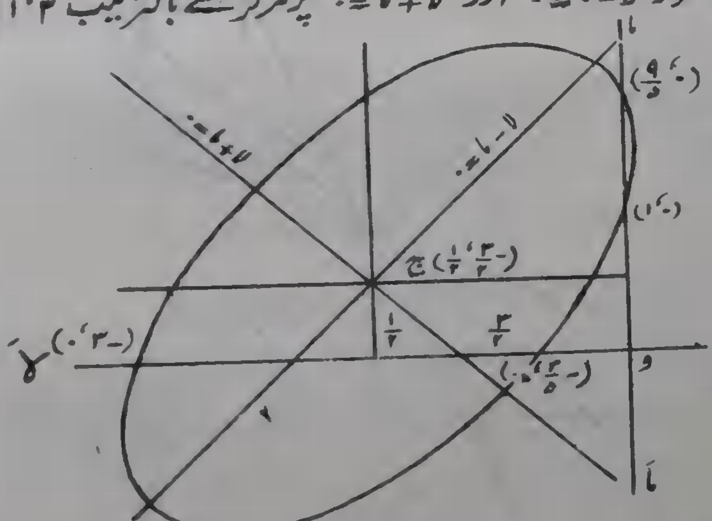
نئے محوروں کے حوالے سے محور اعظم کی مساوات ہے (۵/۸ − ۱/۴) لا − ۳/۸ ما = ۰

یعنی　　لا − ما = ۰ .... (۱)

محور اصغر کی مساوات ہے (۵/۸ − ۱) لا − ۳/۸ ما = ۰

یعنی　　لا + ما = ۰ .... (۲)

خطوط لا − ما = ۰ اور لا + ما = ۰ پر مرکز سے بالترتیب ۲، ۱ کی دوری پر



شکل ۲۱

دونوں طرف قطع کر کے مخروطی کو مرتسم کیا جا سکتا ہے۔ مزید نقاط کے لیے لا = ۰ ابتدائی مساوات میں رکھیں تو $۵ ما^{۲} - ۱۴ ما + ۹ = ۰$ حاصل ہوگا۔ اس لیے ما = ۱، $\frac{۹}{۵}$ اور ما = ۰ رکھیں تو $۵ لا^{۲} + ۱۸ لا + ۹ = ۰$ حاصل ہوگا۔ اس لیے لا = - ۳، - $\frac{۳}{۵}$

مثال (۲)۔ منحنی $لا^{۲} - ۳ لا ما + ما^{۲} + ۱۰ لا - ۱۰ ما + ۲۱ = ۰$ کو مرتسم کرنا

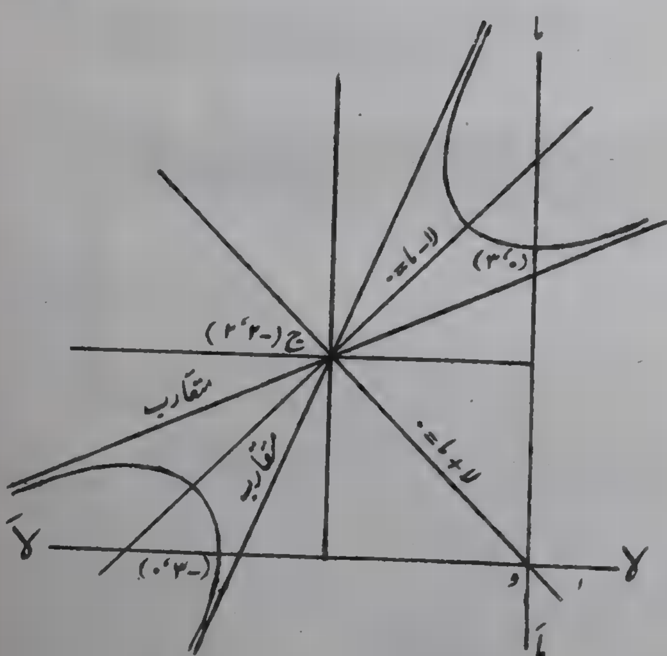
(i) $۱ - (- \frac{۳}{۲})^{۲} < ۰$ ∴ مخروطی زائد ہے۔

(ii) مرکز $(لا_{۱}، ما_{۱})$ کے لیے مساواتیں $لا_{۱} - \frac{۳}{۲} ما_{۱} + ۵ = ۰$، $- \frac{۳}{۲} لا_{۱} + ما_{۱} - ۵ = ۰$

ان کو حل کرنے سے $لا_{۱} = -۲$، $ما_{۱} = ۲$

(iii) مرکز کے لحاظ سے مساوات کو تحویل کرنے سے $لا^{۲} - ۳ لا ما + ما^{۲} + ۵(-۲) - ۲ \times ۵ + ۲۱ = ۰$

یعنی $- لا^{۲} + ۳ لا ما - ما^{۲} = ۱$



شکل ۲۲

(۵أ) محوروں کے طول اور مساواتیں :-

(-۱ - ۱/ر²)² = ۹/۴　∴ ۱ + ۱/ر² = ± ۳/۲　∴ ر² = ۲، - ۲/۵

قاطع محور کی مساوات (-۱ - ۱/۲) لا + ۳/۲ ما = ۰　∴ لا - ما = ۰

مزدوج محور کی مساوات (-۱ + ۵/۲) لا + ۳/۲ ما = ۰　∴ لا + ما = ۰

(۶) متقاربوں کی مساوات لا² - ۳ لا ما + ما² = ۰ حل کرنے سے ما/لا = (۳ ± √۵)/۲

(۶أ) لا = ۰ رکھنے سے ما² - ۱۰ ما + ۲۱ = ۰، ما = ۳، ۷ یعنی زائد پر اسے

محور ما کو (۰، ۳)، (۰، ۷) پر قطع کرتا ہے۔

ما = ۰ رکھنے سے لا² + ۱۰ لا + ۲۱ = ۰، لا = -۳، -۷ - زائد پر انے محور لا کو

(-۳، ۰)، (-۷، ۰) پر قطع کرتا ہے۔

تمام ضروری اجزا معلوم ہو گئے۔ ان کی مدد سے زائد کو مرتسم کیا جا سکتا ہے۔

مثال (۳) ۲ لا² - ۲ ما² - لا ما - ۲ لا - ۷ ما - ۴ = ۰ کو مرتسم کرو۔

(i) ا ب - ھ² = - ۴ - ۱/۴ = منفی ہے　∴ منحنی زائد ہے۔

(ii) مرکز کے لیے ۲ لا - ما/۲ - ۳ = ۰، - لا/۲ - ۲ ما - ۷/۲ = ۰ سے حاصل

ہوتا ہے لا = ۱، ما = -۲

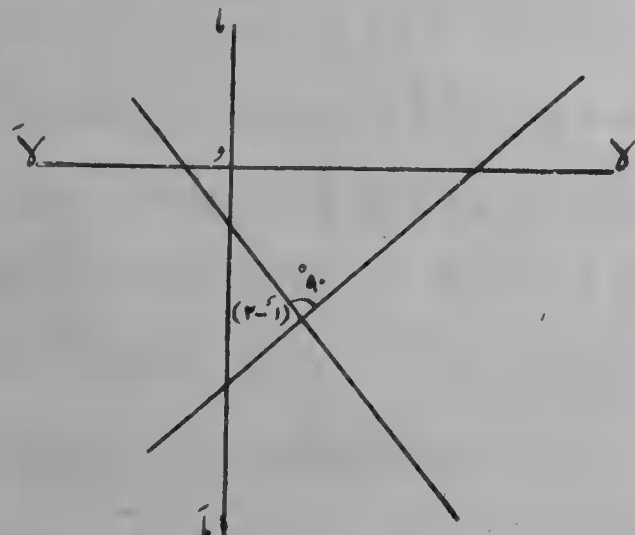
(iii) مبدا کو مرکز پر منتقل کرنے سے مساوات ہو جاتی ہے۔

۲ لا² - ۲ ما² - لا ما - ۲ (۱/۲) - ۷ (-۱) - ۴ = ۰

∴ ۲ لا² - ۲ ما² - لا ما = ۰

یعنی مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے اور یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ

دی ہوئی مساوات کے لیے Δ = صفر



شکل ۲۳

۳ - عام مساوات کی تحویل جبکہ اب = ھ^2 —

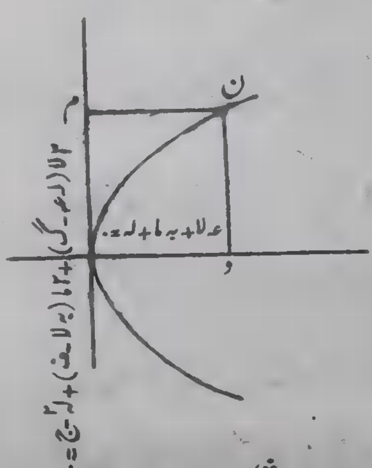
(۱) اس صورت میں س = ۰ کو شکل (عہ لا + بہ ما)^2 = -(۲گ لا + ۲ف ما + ج)
میں لکھا جا سکتا ہے کیونکہ اب = ھ^2 اس لیے
و لا^2 + ۲ھ لا ما + ب ما^2 = (عہ لا + بہ ما)^2 جہاں ا = عہ^2 ، ب = بہ^2
اور ھ = عہ بہ

اوپر کی مساوات سے ظاہر ہے کہ کسی نقطے سے خط عہ لا + بہ ما = ۰ پر عمود کھینچا جائے تو اس عمود کا مربع متناسب ہوتا ہے اس عمود کے جو نقطۂ مذکور سے خط ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ پر کھینچا جائے ۔ اگر یہ دونوں خطوط عمود وار ہوں تو خط عہ لا + بہ ما = ۰ مکافی کا محور اور دوسرا خط راس پر کا مماس ہوگا ۔ لیکن یہ بالعموم علی القوائم نہیں ہوتے ۔ اس لیے مساوات کو ذیل کی شکل میں لکھا جاتا ہے :—

(عہ لا + بہ ما + لہ)^2 = ۲ لا (عہ لہ - گ) + ۲ ما (بہ لہ - ف) + لہ^2 - ج

اب لہ کو اس طرح منتخب کرو کہ خطوط عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ اور
۲ لا (عہ لہ - گ) + ۲ ما (بہ لہ - ف) + لہ^2 - ج = ۰ علی القوائم ہو جائیں
اس کے لیے شرط ہے عہ (عہ لہ - گ) + بہ (بہ لہ - ف) = ۰

∴ لہ = (عہ گ + بہ ف) / (عہ^2 + بہ^2)



شکل ۲۴

پس اس صورت میں
عہ لہ + بہ ما + لہ = ۰ مکافی کا محور ہے اور
۲ لا (لہ عہ - گ) + ۲ ما (بہ لہ - ف) + لہ^2 - ج = ۰
راس پر کا مماس ہوگا۔

(۲) وتر خاص کا طول معلوم کرنا:-

مکافی کا کوئی نقطہ ن ہو تو ہم جانتے ہیں کہ ن د^2 = ۲ ل × ن م جہاں ۲ ل وتر خاص کے طول کو تعبیر کرتا ہے، ن د عمود ہے محور تشاکل پر اور ن م عمود ہے راس پر کے مماس پر۔

محور تشاکل اور راس پر کے مماس کی مساوات کی مدد سے حاصل ہوتا ہے کہ

ن د = (عہ لا + بہ ما + لہ) / √(عہ^2 + بہ^2) ، ن م = [۲ لا (عہ لہ - گ) + ۲ ما (بہ لہ - ف) + لہ^2 - ج] / ۲ √((عہ لہ - گ)^2 + (بہ لہ - ف)^2)

اور لہ = (عہ گ + بہ ف) / √(عہ^2 + بہ^2)

اب ہم مکافی کی مساوات کو ذیل کی شکل میں لکھتے ہیں :-

$$\therefore \left[\frac{\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ}}{\sqrt{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2}}\right]^2 = \frac{2(\text{عہ ف} - \text{بہ گ})}{(\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\text{بہ لا} - \text{عہ ما} + \text{مہ}}{\sqrt{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2}}\right]$$

$$\text{جہاں}\quad \text{مہ} = \frac{(\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2)(\text{لہ}^2 - \text{ج})}{2(\text{عہ ف} - \text{بہ گ})}$$

$$\text{یعنی}\quad \text{ن د}^2 = \frac{2(\text{عہ ف} - \text{بہ گ})}{(\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2)^{\frac{3}{2}}} \times \text{ن م}$$

$$\therefore \text{وترِ خاص کا طول} = \frac{2(\text{عہ ف} - \text{بہ گ})}{(\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

خاص صورت۔ اگر $\frac{\text{گ}}{\text{عہ}} = \frac{\text{ف}}{\text{بہ}}$ تو ان میں سے ہر ایک $= \frac{\text{عہ گ} + \text{بہ ف}}{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2} = \text{لہ}$

$\therefore$ گ − عہ لہ = ۰، ف − بہ لہ = ۰

پس مساوات $[\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ}]^2 = \text{لہ}^2 - \text{ج}$

اس لیے $\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ} = \pm\sqrt{\text{لہ}^2 - \text{ج}}$ ہو جاتا ہے۔

پس س = ۰ سے دو متوازی خطوط تعبیر ہوتے ہیں جبکہ

اب = ھ^2 اور گ بہ = ف عہ یعنی $\text{ا ف}^2 = \text{ب گ}^2$

اس لیے متوازی خطوں کے لیے شرائط ہیں اب = ھ^2 اور $\text{ا ف}^2 = \text{ب گ}^2$

علاوہ اس کے اگر $\text{لہ}^2 = \text{ج}$ تو دونوں خطوط منطبق ہوتے ہیں۔

نوٹ۔ مشقی سوالات میں اوپر کے نتائج کو استعمال کرنے کی بجائے سہولت اس امر میں ہے کہ تحویل کے لیے مندرجہ بالا طریقہ اختیار کیا جائے۔

مثال (۴)۔ $۴\text{لا}^2 + ۱۲\,\text{لا ما} + ۹\,\text{ما}^2 + ۲\,\text{لا} - ۱۰\,\text{ما} + ۳ = ۰$ کو مرتسم کرو۔

اب - ھ^٢ = ٣٦-٣٦ = ٠ اس لیے مخروطی مکانی … ہے -

مساوات کو شکل (٢لا+٣ما+لہ)^٢ = ٢لا(٢لہ-١)+٢ما(٣لہ+٥)+لہ^٢-٣

میں لکھ سکتے ہیں خطوط ٢لا+٣ما+لہ=٠

اور ٢لا(٢لہ-١)+٢ما(٣لہ+٥)+لہ^٢-٣=٠ علی القوائم ہونگے -

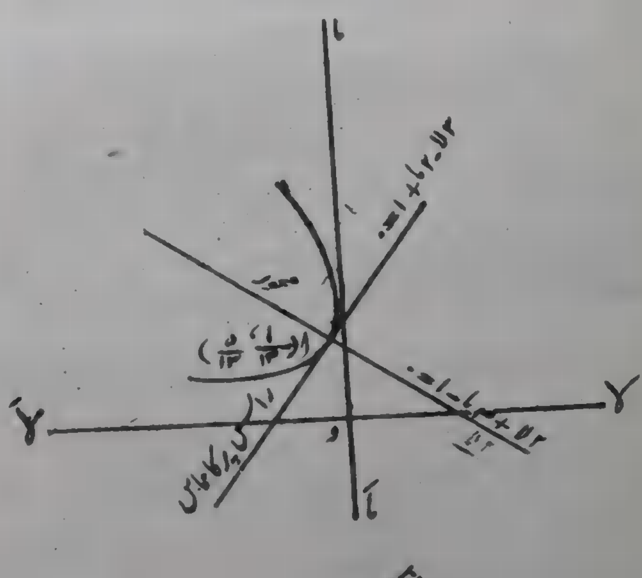
اگر ٤(٢لہ-١)+٦(٣لہ+٥)=٠ یعنی لہ=-١

اس لیے مساوات کی تحویل شدہ شکل ہوگی

((٢لا+٣ما-١)/√١٣)^٢ = (√٥٢/١٣)((-٦لا+٤ما-٢)/√٥٢) = (-٢/√١٣) × (٣لا-٢ما+١)/√١٣

اس لیے مکانی کا محور ٢لا+٣ما-١=٠ اور راس پر کا مماس ٣لا-٢ما+١=٠ ہے - وترِ خاص کا طول ٢/√١٣ ہے - راس کے محدد (-١/١٣ ، ٥/١٣) ہیں -

اب چونکہ (٢لا+٣ما-١)^٢ مثبت ہے اس لیے منحنی کے ہر نقطے کے لیے (٣لا-٢ما+١) منفی ہے - پس منحنی اور مبداء خط ٣لا-٢ما+١=٠ کے مخالف



شکل ۲۵

جانبوں میں واقع ہیں۔

لا = ۰ رکھنے سے ۹ ما^۲ ۔ ۱۰ ما + ۳ = ۰ کی اصلیں خیالی ہیں۔ اس لیے مکانی محور ما کو قطع نہیں کرتا۔ اسی طرح ما = ۰ رکھنے سے ۴ لا^۲ + ۲ لا + ۳ = ۰ کی اصلیں بھی خیالی ہیں۔ یعنی مکانی محور لا کو بھی قطع نہیں کرتا۔

مشقی سوالات

حسب ذیل منحنیوں کو مرتسم کرو:۔

۱۔ ۵ لا^۲ ۔ ۶ لاما + ۵ ما^۲ + ۲۲ لا ۔ ۲۶ ما + ۲۹ = ۰

۲۔ ۶ لا^۲ + ۴ لاما + ۶ ما^۲ ۔ ۲۰ لا + ۴ ما + ۱۴ = ۰

۳۔ ۳ (۳ لا ۔ ۲ ما + ۴)^۲ + ۲ (۲ لا + ۳ ما ۔ ۵)^۲ = ۳۹

۴۔ لا^۲ ۔ ۴ لاما ۔ ۲ ما^۲ + ۱۰ لا + ۴ ما = ۰

۵۔ ۷ لا^۲ + ۸ لاما + ما^۲ ۔ ۵۲ لا ۔ ۲۲ ما + ۷۶ = ۰

۶۔ لاما + ۳ لا + ۴ ما + ۴ = ۰

۷۔ (لا ۔ ۲ ما + ۱) (لا + ۲ ما ۔ ۳) = ۵

۸۔ ۹ لا^۲ ۔ ۲۴ لاما + ۱۶ ما^۲ ۔ ۱۸ لا ۔ ۱۰۱ ما + ۱۹ = ۰

۹۔ ۴ لا^۲ + ما^۲ ۔ ۴ لاما ۔ ۱۰ ما ۔ ۱۹ = ۰

۱۰۔ مساوات (لا ۔ ۲ ما + ۱)^۲ + (۴ لا + ۲ ما ۔ ۳)^۲ ۔ ۱۰ = ۰ سے تعبیر ہونے والے ناقص کے نصف محوروں کا حاصل ضرب معلوم کرو۔

۱۱۔ زائد ۶ لا^۲ ۔ ۷ لاما ۔ ۳ ما^۲ ۔ ۲ لا ۔ ۸ ما ۔ ۶ = ۰ کے متقارب اور مزدوج زائد کی مساوات معلوم کرو۔

ساتواں باب

رقبئی محدد

۱۔ تعریف ——

فرض کرو کہ ا ب ج ایک مثلث ہے اور اس مثلث کے مستوی میں ن کوئی نقطہ ہے۔ اگر

$$\text{لا} = \frac{\Delta\,\text{ن ب ج}}{\Delta\,\text{ا ب ج}} \text{ ؛ } \text{ما} = \frac{\Delta\,\text{ن ج ا}}{\Delta\,\text{ب ج ا}} \text{ ؛ } \text{ہے} = \frac{\Delta\,\text{ن ا ب}}{\Delta\,\text{ج ا ب}}$$

توحوالے کے مثلث ا ب ج کے لحاظ سے (لا، ما، ہے) نقطۂ ن کے رقبئی محدد کہلاتے ہیں۔

مثلثوں کے رقبوں کی علامیت کے متعلق حسبِ معمول قرارداد کے بموجب آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ لا + ما + ہے = ۱

نوٹ۔ رشتہ لا + ما + ہے = ۱ کی مدد سے ہم کسی دی ہوئی مساوات کو متجانس مساوات میں تحویل کرسکتے ہیں۔

مشق۔ ثابت کرو کہ حوالے کے مثلث ا ب ج کے راسوں کے محدد (۱، ۰، ۰) ؛ (۰، ۱، ۰) اور (۰، ۰، ۱) ہیں اور اضلاع ب ج، ج ا، ا ب کے وسطی نقطوں کے محدد $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ؛ $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ اور

$(\frac{1}{2}، \frac{1}{2}، \cdot)$ ہیں اور مثلث ا ب ج کے ہندسی مرکز کے محدد

$(\frac{1}{3}، \frac{1}{3}، \frac{1}{3})$ ہیں۔

۲۔ تحویلی ضابطے —

اگر کسی (قائم یا مائل) محوروں کے حوالے سے حوالے کے مثلث ا ب ج کے راسوں کے کارٹیزی محدد $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$، $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ اور $(\text{لا}_3، \text{ما}_3)$ ہوں اور کسی نقطۂ ن کے محدد (لا، ما) ہوں اور ن کے رقبی محدد (ﻻ، ما، ے) ہوں تو

$$\text{لا} = \text{لا}_1 \text{ﻻ} + \text{لا}_2 \text{ما} + \text{لا}_3 \text{ے} \quad \text{اور} \quad \text{ما} = \text{ما}_1 \text{ﻻ} + \text{ما}_2 \text{ما} + \text{ما}_3 \text{ے}$$

ثبوت۔

$$\text{ﻻ} = \frac{\Delta\ \text{ن ب ج}}{\Delta\ \text{ا ب ج}} = \begin{vmatrix} \text{لا} & \text{لا}_2 & \text{لا}_3 \\ \text{ما} & \text{ما}_2 & \text{ما}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \text{لا}_1 & \text{لا}_2 & \text{لا}_3 \\ \text{ما}_1 & \text{ما}_2 & \text{ما}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \text{لا}(\text{ما}_2 - \text{ما}_3) + \text{ما}(\text{لا}_3 - \text{لا}_2) + (\text{لا}_2\text{ما}_3 - \text{لا}_3\text{ما}_2) = \Delta \times \text{ﻻ}$$

$$\text{جہاں}\ \Delta = \begin{vmatrix} \text{لا}_1 & \text{لا}_2 & \text{لا}_3 \\ \text{ما}_1 & \text{ما}_2 & \text{ما}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

اسی طرح $\text{لا}(\text{ما}_3 - \text{ما}_1) + \text{ما}(\text{لا}_1 - \text{لا}_3) + (\text{لا}_3\text{ما}_1 - \text{لا}_1\text{ما}_3) = \Delta \times \text{ما}$

اور $\text{لا}(\text{ما}_1 - \text{ما}_2) + \text{ما}(\text{لا}_2 - \text{لا}_1) + (\text{لا}_1\text{ما}_2 - \text{لا}_2\text{ما}_1) = \Delta \times \text{ے}$

ان تین رشتوں کو ترتیب وار $\text{لا}_1، \text{لا}_2، \text{لا}_3$ سے ضرب دیکر جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے،

$$\text{لا} = \text{لا}_1 \text{ﻻ} + \text{لا}_2 \text{ما} + \text{لا}_3 \text{ے}$$

اسی طرح مندرجہ بالا تین رشتوں کو ما۱، ما۲، ما۳ سے ضرب دیکر جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ما = ما۱ لا + ما۲ ما + ما۳ سے

فرع - اگر کارٹیزی محددوں کے محور حوالے کے مثلث کے اضلاع ج ب، ج ا ہوں تو لا = ا ما اور ما = ب لا

جہاں ج ب = ا اور ج ا = ب - نیز لا = ما/ب، ما = لا/ا

اور سے = ۱ - لا/ا - ما/ب

۳- مثلث کا رقبہ ___

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے حوالے سے ایک مثلث ف ق س کے راسوں کے رقبی محدد (لا۱، ما۱، سے۱)، (لا۲، ما۲، سے۲) اور (لا۳، ما۳، سے۳) ہیں۔ اگر حوالے کے مثلث کے راسوں کے کارٹیزی محدد (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳) ہوں تو Δ ف ق س کے راسوں کے کارٹیزی محدد (لاَ، ماَ)، (لاً، ماً) اور (لاً، ماً) رقبی محددوں کے رقوم میں حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ چنانچہ

لاَ = لا۱ لا۱ + لا۲ ما۱ + لا۳ سے۱ اور ماَ = ما۱ لا۱ + ما۲ ما۱ + ما۳ سے۱ وغیرہ۔

اگر کارٹیزی محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہو تو Δ ف ق س کا رقبہ

= ½ جیب سہ ×

لا۱لا۱ + لا۲ما۱ + لا۳سے۱	لا۱لا۲ + لا۲ما۲ + لا۳سے۲	لا۱لا۳ + لا۲ما۳ + لا۳سے۳
ما۱لا۱ + ما۲ما۱ + ما۳سے۱	ما۱لا۲ + ما۲ما۲ + ما۳سے۲	ما۱لا۳ + ما۲ما۳ + ما۳سے۳
لا۱ + ما۱ + سے۱	لا۲ + ما۲ + سے۲	لا۳ + ما۳ + سے۳

$$= \frac{1}{2}\,\text{جب سہ} \begin{vmatrix} لا_1 & لا_2 & لا_3 \\ ما_1 & ما_2 & ما_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} لا_1 & ما_1 & ہے_1 \\ لا_2 & ما_2 & ہے_2 \\ لا_3 & ما_3 & ہے_3 \end{vmatrix}$$

$$= \Delta\,\text{اب ج} \times \begin{vmatrix} لا_1 & ما_1 & ہے_1 \\ لا_2 & ما_2 & ہے_2 \\ لا_3 & ما_3 & ہے_3 \end{vmatrix}$$

فرع۔ اگر $\begin{vmatrix} لا_1 & ما_1 & ہے_1 \\ لا_2 & ما_2 & ہے_2 \\ لا_3 & ما_3 & ہے_3 \end{vmatrix}$ = صفر تو ∆ ف ق سہ کا رتبہ صفر ہوگا

یعنی نقاط ف، ق، سہ ہم خط ہوں گے۔

۴ ۔ اگر نقاط ف اور ق کے رقبی محدد $(لا_1، ما_1، ہے_1)$ اور $(لا_2، ما_2، ہے_2)$ ہوں اور خط ف ق پر نقطہ سہ اس طرح لیا جائے کہ ف سہ : سہ ق = ک : ل تو نقطہ سہ کے رقبی محدد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ج ب، ج ا کے حوالے سے نقاط ف، ق اور سہ کے کارٹیزی محدد $(لا_1، ما_1)$، $(لا_2، ما_2)$ اور $(\bar{لا}، \bar{ما})$ ہیں۔

$$\text{تب}\quad \bar{لا} = \frac{ک\,لا_2 + ل\,لا_1}{ک+ل} \quad ؛ \quad \bar{ما} = \frac{ک\,ما_2 + ل\,ما_1}{ک+ل}$$

$$\text{یعنی}\quad \bar{لا} = \frac{ا(ک\,ما_2 + ل\,ما_1)}{ک+ل} \quad \text{اور} \quad \bar{ما} = \frac{ب(ک\,لا_2 + ل\,لا_1)}{ک+ل}$$

اگر نقطہ سہ کے رقبی محدد $(\bar{لا}، \bar{ما}، \bar{ہے})$ ہوں تو

$$\text{لاَ} = \frac{\text{اَ}}{\text{بَ}} = \frac{\text{ک لا}_2 + \text{ل لا}_1}{\text{ک} + \text{ل}} \quad \text{اور} \quad \text{ماَ} = \frac{\text{لاَ}}{\text{دَ}} = \frac{\text{ک ما}_2 + \text{ل ما}_1}{\text{ک} + \text{ل}}$$

$$\text{اور } \text{ےَ} = 1 - \text{لاَ} - \text{ماَ} = 1 - \frac{\text{ک لا}_2 + \text{ل لا}_1}{\text{ک} + \text{ل}} - \frac{\text{ک ما}_2 + \text{ل ما}_1}{\text{ک} + \text{ل}}$$

$$= \frac{\text{ک}(1 - \text{لا}_2 - \text{ما}_2) + \text{ل}(1 - \text{لا}_1 - \text{ما}_1)}{\text{ک} + \text{ل}}$$

$$= \frac{\text{ک ے}_2 + \text{ل ے}_1}{\text{ک} + \text{ل}}$$

۵ ۔ اگر کسی ترسیم کی مساوات رقبی محددوں میں دی گئی ہو (یعنی ایک ایسا رشتہ دیا گیا ہو جس کو ترسیم کے ہر نقطے کے رقبی محدد پورا کرتے ہیں) تو اس مساوات کو رشتہ $\text{لا} + \text{ما} + \text{ے} = 1$ کی مدد سے متجانس بنایا جا سکتا ہے۔
مثلاً رقبی محددوں (لا، ما، ے) میں درجہ دوم کی عام سے عام مساوات ہے

$$\text{ا لا}^2 + \text{ب ما}^2 + \text{ج ے}^2 + \text{۲ف ما ے} + \text{۲گ ے لا} + \text{۲ھ لا ما} + \text{۲ع لا} + \text{۲و ما} + \text{۲ ۸ ے} + \text{د} = 0$$

اس مساوات کو رشتہ $\text{لا} + \text{ما} + \text{ے} = 1$ کی مدد سے متجانس بنانے سے ذیل کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{ا لا}^2 + \text{ب ما}^2 + \text{ج ے}^2 + \text{۲ف ما ے} + \text{۲گ ے لا} + \text{۲ھ لا ما} + (\text{لا} + \text{ما} + \text{ے})(\text{۲ع لا} + \text{۲و ما} + \text{۲ ۸ ے}) + (\text{لا} + \text{ما} + \text{ے})^2 \text{د} = 0$$

اس مساوات کی شکل حسب ذیل ہے

$$\text{ا}_1\text{لا}^2 + \text{ب}_1\text{ما}^2 + \text{ج}_1\text{ے}^2 + \text{۲ف}_1\text{ما ے} + \text{۲گ}_1\text{ے لا} + \text{۲ھ}_1\text{لا ما} = 0$$

نوٹ ۔ آئندہ دفعات میں ہم رقبی محددوں میں صرف متجانس مساواتیں لینگے۔

۶۔ خطی مساوات —

کارٹیزی محددوں میں کسی خط کی مساوات ہوگی

ا لا + ب ما + ج = ۰

دفعہ (۲) کے تحویلی ضابطوں کی مدد سے رقبی محددوں میں اس خط کی مساوات ہوگی

ا (ل۱ لا + ل۲ ما + ل۳ ے) + ب (م۱ لا + م۲ ما + م۳ ے) + ج (لا + ما + ے) = ۰

اس مساوات کی شکل حسب ذیل ہے

ل لا + م ما + ن ے = ۰

جو لا، ما، ے میں درجہ اول کی متجانس مساوات ہے۔ پس معلوم ہوا کہ رقبی محددوں میں کسی خط مستقیم کی مساوات درجہ اول کی متجانس مساوات ہوتی ہے۔ اس نتیجہ کا عکس بھی درست ہے یعنی رقبی محددوں میں درجہ اول کی ہر متجانس مساوات ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ اس کا ثبوت مشق کے طور پر طالب علم خود لکھے۔

۷۔ لاتناہی پر کا خط —

رقبی محددوں میں درجہ اول کی مساوات

لا + ما + ے = ص (ل لا + م ما + ن ے)

پر غور کرو۔

ج ب، ج ا کو کارٹیزی محددوں کے محور ماننے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

ا = ص [ل ما/ب + م لا/د + ن (ا − لا/د − ما/ب)]

یعنی (صہ(م-ن)/ا) لا + (صہ(ل-ن)/ب) ما = ا - صہ ن

یہ خط حوالے کے محوروں ج ب ، ج ا پر مقطوعے

ا(ا-صہ ن)/صہ(م-ن) ، ب(ا-صہ ن)/صہ(ل-ن) کاٹتا ہے۔

اب اگر صہ مائل بہ صفر ہو تو ان مقطوعوں کے طول مائل بہ لاتناہی ہوتے ہیں اور اس خط کے انتہائی مقام کو لاتناہی پر کا خط کہتے ہیں۔

لاتناہی پر کے خط کی مساوات ہے

لا + ما + ے = نہا (صہ ← ۰) صہ (ل لا + م ما + ن ے)

اس مساوات کو اکثر ذیل کی شکل میں لکھا جاتا ہے

لا + ما + ے = ۰

نوٹ۔ چونکہ کسی نقطے کے رقبی محدد ہمیشہ رشتہ لا + ما + ے = ا کو پورا کرتے ہیں اس لیے لاتناہی پر کے خط کی مندرجۂ بالا مساوات بظاہر متناقض (**Inconsistent**) معلوم ہوتی ہے۔ اس کے متعلق مزید تشریح آئندہ دفعہ میں کی جائیگی۔

۸۔ متوازی خطوط

چونکہ دو متوازی خطوں کا نقطۂ تقاطع لاتناہی پر کے خط پر ہوتا ہے اس لیے خطوط

ل١ لا + م١ ما + ن١ ے = ۰ اور ل٢ لا + م٢ ما + ن٢ ے = ۰

متوازی ہونگے اگر ذیل کی تین مساواتیں ایک ساتھ پوری ہوں:-

ل$_1$ لا + م$_1$ ما + ن$_1$ ے = ۰

ل$_2$ لا + م$_2$ ما + ن$_2$ ے = ۰

لا + ما + ے = نہـا (صہ ← ۰) صہ (ل لا + م ما + ن ے)

اس کے لیے شرط ہے کہ

ل$_1$	م$_1$	ن$_1$
ل$_2$	م$_2$	ن$_2$
۱ - صہ ل	۱ - صہ م	۱ - صہ ن

= ۰ جبکہ صہ ← ۰

یعنی

ل$_1$	م$_1$	ن$_1$
ل$_2$	م$_2$	ن$_2$
۱	۱	۱

= ۰

نوٹ - اگر ہم لاتناہی پر کے خط کی مساوات لا + ما + ے = ۰ لیں تو دیے ہوئے دو خطوں اور لاتناہی پر کے خط میں ایک مشترک نقطہ ہونے کی شرط وہی ہوتی ہے جو اوپر حاصل کی گئی ہے۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ لاتناہی پر کے خط کی مساوات

لا + ما + ے = نہـا (صہ ← ۰) صہ (ل لا + م ما + ن ے)

کو شکل لا + ما + ے = ۰ میں لکھنے سے سہولت ہوتی ہے۔

۹ - دو دیے ہوئے نقطوں ن$_1$ (لا$_1$، ما$_1$، ے$_1$) اور ن$_2$ (لا$_2$، ما$_2$، ے$_2$) میں سے گذرنے والے خط مستقیم کی مساوات۔

فرض کرو کہ اس خط پر کا کوئی نقطہ ن (لا، ما، ے) ہے۔

تب چونکہ نقاط ن، ن۱، ن۲ ہم خط ہیں، اس لیے

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & \text{ے} \\ \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & \text{ے}_1 \\ \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & \text{ے}_2 \end{vmatrix} = ۰$$

نوٹ (i) مقطعہ کو پھیلانے سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ مساوات درجۂ اول کی ہے۔

(ii) حوالے کے مثلث اب ج کے ضلع ب ج پر لاتناہی پر کا نقطہ ط۱ خط ب ج کو ۱ : -۱ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ اس لیے ط۱ کے رقبی محدد ہونگے (۰، -۱، ۱)۔ اسی طرح ج ا پر لاتناہی پر کے نقطے ط۲ کے محدد ہونگے (-۱، ۰، ۱)۔ اِن دو نقطوں ط۱، ط۲ میں سے گذرنے والا خط لاتناہی پر کا خط ہوگا اور اس کی مساوات ہوگی

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & \text{ے} \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

یعنی　$\text{لا} + \text{ما} + \text{ے} = ۰$

اس کا مقابلہ دفعہ (۷) کے نتیجے سے کیا جائے۔

۱۰۔ خط مستقیم کی مساوات کی خاص شکل

فرض کرو کہ زیر بحث خط پر کے دو ثابت نقطے ن۱ (لا۱، ما۱، ے۱) اور ن۲ (لا۲، ما۲، ے۲) ہیں۔ نیز فرض کرو کہ اس پر کا کوئی نقطہ ن (لا، ما، ے) ہے

اور $\text{ن}_{\text{۱}}\text{ن} : \text{ن}\,\text{ن}_{\text{۲}} = \text{ک}_{\text{۱}} : \text{ک}_{\text{۲}}$

تب
$$\text{لا} = \frac{\text{ک}_{\text{۱}}\text{لا}_{\text{۲}} + \text{ک}_{\text{۲}}\text{لا}_{\text{۱}}}{\text{ک}_{\text{۱}} + \text{ک}_{\text{۲}}}\text{،}\quad \text{ما} = \frac{\text{ک}_{\text{۱}}\text{ما}_{\text{۲}} + \text{ک}_{\text{۲}}\text{ما}_{\text{۱}}}{\text{ک}_{\text{۱}} + \text{ک}_{\text{۲}}}\text{،}\quad \text{ے} = \frac{\text{ک}_{\text{۱}}\text{ے}_{\text{۲}} + \text{ک}_{\text{۲}}\text{ے}_{\text{۱}}}{\text{ک}_{\text{۱}} + \text{ک}_{\text{۲}}}$$

$$\therefore\ \text{لا} - \text{لا}_{\text{۱}} = \frac{\text{ک}_{\text{۱}}(\text{لا}_{\text{۲}} - \text{لا}_{\text{۱}})}{\text{ک}_{\text{۱}} + \text{ک}_{\text{۲}}}$$

اسی طرح اور دو مماثل نتیجے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

$$\therefore\ \frac{\text{لا} - \text{لا}_{\text{۱}}}{\text{لا}_{\text{۲}} - \text{لا}_{\text{۱}}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_{\text{۱}}}{\text{ما}_{\text{۲}} - \text{ما}_{\text{۱}}} = \frac{\text{ے} - \text{ے}_{\text{۱}}}{\text{ے}_{\text{۲}} - \text{ے}_{\text{۱}}} = \frac{\text{ک}_{\text{۱}}}{\text{ک}_{\text{۱}} + \text{ک}_{\text{۲}}} = \frac{\text{ر}}{\text{رَ}}$$

جہاں $\text{ر} = \text{ن}_{\text{۱}}\text{ن}$ اور $\text{رَ} = \text{ن}_{\text{۱}}\text{ن}_{\text{۲}}$

اب لکھو
$$\frac{\text{لا}_{\text{۲}} - \text{لا}_{\text{۱}}}{\text{رَ}} = \text{ل}\text{،}\quad \frac{\text{ما}_{\text{۲}} - \text{ما}_{\text{۱}}}{\text{رَ}} = \text{م}\text{،}\quad \frac{\text{ے}_{\text{۲}} - \text{ے}_{\text{۱}}}{\text{رَ}} = \text{ن}$$

تب
$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_{\text{۱}}}{\text{ل}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_{\text{۱}}}{\text{م}} = \frac{\text{ے} - \text{ے}_{\text{۱}}}{\text{ن}} = \text{ر}$$

جہاں $(\text{لا}_{\text{۱}}\text{، ما}_{\text{۱}}\text{، ے}_{\text{۱}})$ سے نقطہ (لا، ما، ے) کے فاصلے کو ر سے تعبیر کیا گیا ہے اور ل، م، ن ایسی مقداریں ہیں جو خط کی سمت پر منحصر ہیں۔

نوٹ۔ $\text{ل} + \text{م} + \text{ن} = \frac{(\text{لا}_{\text{۲}} - \text{لا}_{\text{۱}}) + (\text{ما}_{\text{۲}} - \text{ما}_{\text{۱}}) + (\text{ے}_{\text{۲}} - \text{ے}_{\text{۱}})}{\text{رَ}} = \text{صفر}$

۱۱۔ چونکہ رقبی محددوں میں درجہ دوم کی مساوات دفعہ (۲) کے تحویلی ضابطوں کی مدد سے درجہ دوم کی کارٹیزی مساوات میں تحویل ہو جاتی ہے اس لیے معلوم ہوتا ہے کہ رقبی محددوں میں درجہ دوم کی مساوات

$$\text{ا}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}\,\text{ما}^{2} + \text{ج}\,\text{ے}^{2} + \text{۲ف}\,\text{ما}\,\text{ے} + \text{۲گ}\,\text{ے}\,\text{لا} + \text{۲ہ}\,\text{لا}\,\text{ما} = \text{۰}$$

سے ایک مخروطی تراشش تعبیر ہوتی ہے۔

۱۲- خطوط مستقیم کے جوڑے کے لیے شرط

رقبی محددوں میں درجہ دوم کی عام مساوات

$$\text{ا}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}\,\text{ما}^{2} + \text{ج}\,\text{ے}^{2} + 2\,\text{ف}\,\text{ما}\,\text{ے} + 2\,\text{گ}\,\text{ے}\,\text{لا} + 2\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} = 0$$

خطوط مستقیم کے ایک جوڑے کو تعبیر کریگی اگر اس مساوات کی دائیں جانب کے جملے کو دو خطی اجزائے ضربی تحلیل کیا جائے۔ اس کے لیے شرط حسب ذیل ہے

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ھ} & \text{گ} \\ \text{ھ} & \text{ب} & \text{ف} \\ \text{گ} & \text{ف} & \text{ج} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

مندرجہ بالا شرط کے پورے ہونے پر درجہ دوم کی عام مساوات خطوط مستقیم کے ایک جوڑے کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۳- درجہ دوم کی عام مساوات کی تحویل کارٹیزی محددوں میں

اگر حوالے کے مثلث کے ضلعوں ج ب، ج ا کو حوالے کے کارٹیزی محور مانا جائے تو تحویلی ضابطے حسب ذیل ہونگے

$$\text{لا} = \frac{\text{ما}}{\text{ب}} \;؛\; \text{ما} = \frac{\text{لا}}{\text{ا}} \;؛\; \text{ے} = 1 - \frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}$$

اِن ضابطوں کی مدد سے رقبی محددوں میں درجہ دوم کی عام مساوات

$$\text{ا}\,\text{لا}^{2} + \text{ب}\,\text{ما}^{2} + \text{ج}\,\text{ے}^{2} + 2\,\text{ف}\,\text{ما}\,\text{ے} + 2\,\text{گ}\,\text{ے}\,\text{لا} + 2\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{ما} = 0$$

سے تعبیر ہونے والے منحنی کی کارٹیزی مساوات ہوجاتی ہے

$$\text{ا}\,\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} + \text{ب}\,\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} + \text{ج}\left(1 - \frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)^{2} + 2\,\text{ف}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\left(1 - \frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)$$

$$+ 2\,\text{گ}\left(1 - \frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)\frac{\text{ما}}{\text{ب}} + 2\,\text{ھ}\,\frac{\text{لا}\,\text{ما}}{\text{ا}\,\text{ب}} = 0$$

اس مساوات میں درجہ دوم کی رقمیں، جن کے سروں کی مدد سے مخروطی کی نوعیت متعین ہوتی ہے، حسب ذیل ہیں :-

$$\frac{\text{ب}+\text{ج}-۲\text{ف}}{\text{ا}^۲}\,\text{لا}^۲+۲\,\frac{\text{ج}+\text{ھ}-\text{ف}-\text{گ}}{\text{اب}}\,\text{لاما}+\frac{\text{ج}+\text{ا}-۲\text{گ}}{\text{ب}^۲}\,\text{ما}^۲$$

۱۴- دائرے کے لیے شرط —

مخروطی تراش دائرہ ہوگی اگر اوپر کی مساوات میں $\text{لا}^۲$، $۲\,\text{لاما}$، $\text{ما}^۲$ کے سر بالترتیب متناسب ہوں ۱، جم ج، ۱ کے - یعنی متناسب ہوں ۱، $\frac{\text{ا}^۲+\text{ب}^۲-\text{ج}^۲}{۲\,\text{اب}}$، ۱ کے۔

اس لیے دائرے کے شرایط حسب ذیل ہیں :-

$$\frac{\dfrac{\text{ب}+\text{ج}-۲\text{ف}}{\text{ا}^۲}}{۱}=\frac{\dfrac{\text{ج}+\text{ھ}-\text{ف}-\text{گ}}{\text{اب}}}{\dfrac{\text{ا}^۲+\text{ب}^۲-\text{ج}^۲}{۲\,\text{اب}}}=\frac{\dfrac{\text{ج}+\text{ا}-۲\text{گ}}{\text{ب}^۲}}{۱}$$

یعنی
$$\frac{\text{ب}+\text{ج}-۲\text{ف}}{\text{ا}^۲}=\frac{\text{ج}+\text{ا}-۲\text{گ}}{\text{ب}^۲}=\frac{۲(\text{ج}+\text{ھ}-\text{ف}-\text{گ})}{\text{ا}^۲+\text{ب}^۲-\text{ج}^۲}$$

ان کسروں میں سے ہر ایک
$$=\frac{(\text{ب}+\text{ج}-۲\text{ف})+(\text{ج}+\text{ا}-۲\text{گ})-۲(\text{ج}+\text{ھ}-\text{ف}-\text{گ})}{\text{ا}^۲+\text{ب}^۲-(\text{ا}^۲+\text{ب}^۲-\text{ج}^۲)}$$

$$=\frac{\text{ا}+\text{ب}-۲\text{ھ}}{\text{ج}^۲}$$

اس لیے دائرے کے لیے شرائط حسب ذیل ہونگے :-

$$\frac{\text{ب}+\text{ج}-۲\text{ف}}{\text{ا}^۲}=\frac{\text{ج}+\text{ا}-۲\text{گ}}{\text{ب}^۲}=\frac{\text{ا}+\text{ب}-۲\text{ھ}}{\text{ج}^۲}$$

۱۵- ناقص، مکافی، زائد کے لیے جانچ — دفعہ (۱۳) کی کارٹیزی

مساوات سے حاصل ہوتا ہے کہ مخروطی ناقص، مکافی یا زائد ہے بموجب اس کے کہ

(ج + ھ ۔ ف ۔ گ)^۲ ⋛ (ب + ج ۔ ۲ ف) (ج + ا ۔ ۲ گ)

یعنی بموجب اس کے کہ

ف^۲ + گ^۲ + ھ^۲ ۔ ۲ ف گ ۔ ۲ گ ھ ۔ ۲ ھ ف + ۲ ا ف + ۲ ب گ
+ ۲ ج ھ ۔ ب ج ۔ ج ا ۔ ا ب ⋛ صفر

یعنی بموجب اس کے کہ

ا	ھ	گ	۱
ھ	ب	ف	۱
گ	ف	ج	۱
۱	۱	۱	۰

⋛ صفر

نوٹ ۔ اگر ہم لکھیں

ب + ج ۔ ۲ ف = ف۱

ج + ا ۔ ۲ گ = ق۱

ا + ب ۔ ۲ ھ = ر۱

تو مخروطی ناقص، مکافی، زائد ہے بموجب اس کے کہ

ف۱^۲ + ق۱^۲ + ر۱^۲ ۔ ۲ ف۱ ق۱ ۔ ۲ ق۱ ر۱ ۔ ۲ ر۱ ف۱ ⋛ صفر

۱۶ ۔ اس باب کے بقیہ حصہ میں جہاں کارٹیزی محدد استعمال نہ کیے گئے ہوں اختصار کی غرض سے ہم رقبی محددوں (لا، ما، ہے) کی بجائے (لا، ما، ی) لکھینگے یعنی رقبی محددوں میں درجہ دوم کی عام مساوات لکھی جائیگی

ف (لا، ما، ی) ≡ ا لا^۲ + ب ما^۲ + ج ی^۲ + ۲ ف ما ی + ۲ گ ی لا + ۲ ھ لا ما = صفر

۱۷۔ خط مستقیم اور مخروطی کے نقاط تقاطع ——

اگر دیا ہوا خط مستقیم (لا − لا۱)/ل = (ما − ما۱)/م = (ی − ی۱)/ن = ر ہو تو

لا = لا۱ + ل ر ؛ ما = ما۱ + م ر ؛ ی = ی۱ + ن ر

اس خط مستقیم اور مخروطی ف (لا، ما، ی) = ۰ کے نقاط تقاطع پر

ا (لا۱ + رل)² + ب (ما۱ + رم)² + ج (ی۱ + رن)² + ۲ ف (ما۱ + رم) (ی۱ + رن)

+ ۲ گ (ی۱ + رن) (لا۱ + رم) + ۲ ھ (لا۱ + رم) (ما۱ + رن) = صفر

یعنی ر² ف (ل، م، ن) + ۲ (ل صا۱ + م عا۱ + ن ظا۱) ر + ف (لا۱، ما۱، ی۱) = صفر

جہاں صا۱ = ا لا۱ + ھ ما۱ + گ ی۱

عا۱ = ھ لا۱ + ب ما۱ + ف ی۱

ظا۱ = گ لا۱ + ف ما۱ + ج ی۱

مندرجہ بالا درجہ دوم کی مساوات کو حل کرنے سے (ر) کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جو نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) سے خط مستقیم اور مخروطی کے نقاط تقاطع کے فاصلوں کو تعبیر کرتی ہیں۔

۱۸۔ مماس کی مساوات ——

اگر نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) مخروطی ف (لا، ما، ی) = ۰ پر ہو تو ف (لا۱، ما۱، ی۱) = ۰

اس لیے مندرجہ بالا درجہ دوم کی مساوات کی ایک اصل صفر ہوگی یعنی خط اور مخروطی کے دو نقاط تقاطع میں سے ایک دیے ہوئے نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر ہوگا جیسا کہ ظاہر ہے۔ اگر دوسری اصل بھی صفر ہو تو خط اور مخروطی کے دونوں نقاط تقاطع

(لا۱، ما۱، ی۱) پر منطبق ہونگے ۔ یعنی خط (لا۱، ما۱، ی۱) پر مخروطی کا مماس ہوگا ۔
دونوں اصلوں کے صفر ہونے کے لیے شرائط حسب ذیل ہیں :—

(i) ف (لا۱، ما۱، ی۱) = ۰

(ii) ل صا۱ + م عا۱ + ن ظا۱ = ۰

اس دوسرے رشتہ میں

ل = (لا − لا۱) / ر ؛ م = (ما − ما۱) / ر ؛ ن = (ی − ی۱) / ر

درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(لا − لا۱) صا۱ + (ما − ما۱) عا۱ + (ی − ی۱) ظا۱ = صفر

یعنی لا صا۱ + ما عا۱ + ی ظا۱ = لا۱ صا۱ + ما۱ عا۱ + ی۱ ظا۱ = ف (لا۱، ما۱، ی۱) = صفر

اس مساوات کی تفصیلی شکل حسب ذیل ہے :

لا (الا۱ + ھ ما۱ + گ ی۱) + ما (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف ی۱)

+ ی (گ لا۱ + ف ما۱ + ج ی۱) = صفر

یعنی الا لا۱ + ب ما ما۱ + ج ی ی۱ + ف (ما ی۱ + ما۱ ی) + گ (ی لا۱ + ی۱ لا)

+ ھ (لا ما۱ + لا۱ ما) = صفر

نوٹ ۔ صا۱، عا۱، ظا۱ ترتیب وار

۱/۲ (جف ف / جف لا۱)، ۱/۲ (جف ف / جف ما۱)، ۱/۲ (جف ف / جف ی۱) کی قیمتیں ہیں

نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر ۔

اس لیے تفرقی احصا کی ترقیم استعمال کرنے سے مخروطی ف (لا، ما، ی) = ۰
کے نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر کے مماس کی مساوات شکل

لا (جف ف / جف لا۱) + ما (جف ف / جف ما۱) + ی (جف ف / جف ی۱) = صفر میں لکھی جا سکتی ہے ۔

۱۹۔ اختصار کی خاطر ہم جملہ (لا صا، + ما عا، + ی ظا،) کو علامت م، سے تعبیر کرینگے ۔ اس مختصر ترقیم کے بموجب نقطہ (لا، ما، ی،) پر کے مماس کی مساوات ہوگی م، = صفر

اگر نقطہ (لا، ما، ی،) مخروطی ف (لا، ما، ی) = صفر پر نہ ہو تو آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ م، = ۰ سے اُن مماسوں کا وتر تماس تعبیر ہوتا ہے جو نقطہ (لا، ما، ی،) سے مخروطی تک کھینچے جائیں ۔ یعنی مخروطی ف (لا، ما، ی) = ۰ کے لحاظ سے (لا، ما، ی،) کے قطبی کی مساوات ہے م، = ۰

نیز یہ بھی آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اُس وتر کی مساوات جس کا وسطی نقطہ (لا، ما، ی،) ہے حسب ذیل ہے :-

م، = س،

جہاں س، = ف (لا، ما، ی،)

۲۰ ۔ تماس کی شرط —

اس کے لیے شرط معلوم کرنا کہ خط مستقیم ل لا + م ما + ن ی = ۰ مخروطی ف (لا، ما، ی) = ۰ کو مس کرے ۔

فرض کرو کہ دیا ہوا خط مخروطی کو نقطہ (لا، ما، ی،) پر مس کرتا ہے ۔

نقطہ (لا، ما، ی،) پر مماس کی مساوات ہے

(ا لا، + ھ ما، + گ ی،) لا + (ھ لا، + ب ما، + ف ی،) ما

+ (گ لا، + ف ما، + ج ی،) ی = ۰

لیکن ہم نے فرض کیا ہے کہ خط ل لا + م ما + ن ی = ۰ مخروطی کے نقطہ (لا، ما، ی،) پر کا مماس ہے ۔

اس لیے اِن دو مساواتوں میں نظیر کی رقموں کے سر متناسب ہونگے ۔

یعنی
$$\frac{ا\,لا_1 + ه\,ما_1 + گ\,ی_1}{ل} = \frac{ه\,لا_1 + ب\,ما_1 + ف\,ی_1}{م}$$
$$= \frac{گ\,لا_1 + ف\,ما_1 + ج\,ی_1}{ن} = لہ،$$
فرض کرو۔

تب
$$ا\,لا_1 + ه\,ما_1 + گ\,ی_1 - ل\,لہ = ۰$$
$$ه\,لا_1 + ب\,ما_1 + ف\,ی_1 - م\,لہ = ۰$$
$$گ\,لا_1 + ف\,ما_1 + ج\,ی_1 - ن\,لہ = ۰$$

نیز چونکہ نقطہ تماس ($لا_1$، $ما_1$، $ی_1$) مماس $ل\,لا + م\,ما + ن\,ی = ۰$ پر ہے

اس لیے $ل\,لا_1 + م\,ما_1 + ن\,ی_1 = ۰$۔

درجہ اول کی مندرجہ بالا چار متجانس مساواتوں سے $لا_1$، $ما_1$، $ی_1$، لہ کو ساقط کرنے سے تماس کی مطلوبہ شرط حاصل ہوتی ہے جو حسب ذیل ہے

$$\begin{vmatrix} ا & ه & گ & ل \\ ه & ب & ف & م \\ گ & ف & ج & ن \\ ل & م & ن & ۰ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

نوٹ۔ چونکہ لاتناہی پر کے خط کی مساوات $لا + ما + ی = ۰$ ہے

اس لیے مخروطی ف (لا، ما، ی) = ۰ کو لاتناہی پر کا خط مس کریگا

اگر
$$\begin{vmatrix} ا & ه & گ & ۱ \\ ه & ب & ف & ۱ \\ گ & ف & ج & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

یہ شرط دراصل اس امر کی شرط ہے کہ مخروطی مکافی ہو۔
پس معلوم ہوا کہ ہر مکافی لاتناہی پر کے خط کو مس کرتا ہے۔

۲۱۔ مخروطی کے مرکز کے محدد

فرض کرو کہ مساوات ف (لا، ما، ی) = ۰ ایک مرکز دار مخروطی کو تعبیر کرتی ہے اور مرکز کے محدد (لا۱، ما۱، ی۱) ہیں۔
تب (لا۱، ما۱، ی۱) میں سے گذرنے والا ہر خط

$$\frac{لا - لا_۱}{ل} = \frac{ما - ما_۱}{م} = \frac{ی - ی_۱}{ن} = ر$$

مخروطی کو ایسے دو نقطوں پر قطع کریگا جو (لا۱، ما۱، ی۱) سے مساوی فاصلوں پر مقابل کی جانبوں میں واقع ہیں۔
یعنی مساوات

$$ر^۲ ف (ل، م، ن) + ۲ر (ل صا_۱ + م عا_۱ + ن ظا_۱) + ف (لا_۱، ما_۱، ی_۱) = صفر$$

کی اصلوں کا مجموعہ صفر ہوگا ل، م، ن کی تمام قیمتوں کے لیے

یعنی $ل صا_۱ + م عا_۱ + ن ظا_۱ = ۰$

نیز $ل + م + ن = ۰$

اس لیے $صا_۱ = عا_۱ = ظا_۱$

یعنی $ا لا_۱ + ھ ما_۱ + گ ی_۱ = ھ لا_۱ + ب ما_۱ + ف ی_۱$
$= گ لا_۱ + ف ما_۱ + ج ی_۱$

نیز $لا_۱ + ما_۱ + ی_۱ = ۱$
ان مساواتوں کو حل کرلینے سے (لا۱، ما۱، ی۱) کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

نوٹ۔ مخروطی کا مرکز مخروطی کے لحاظ سے لاتناہی پر کے خط
لا + ما + ی = ۰ کا قطب ہے۔ یعنی مرکز (لا، ما، ی) کا
قطبی لا صا + ما عا + ی ظا = ۰ لاتناہی پر کا خط
ہے۔

اس لیے صا = عا = ظا

۲۲۔ حوالے کے مثلث کے راسوں میں سے گذرنے والی کسی مخروطی تراش کی مساوات شکل

ف ما ی + گ ی لا + ھ لا ما = ۰

کی ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ مخروطی تراش

ا لا² + ب ما² + ج ی² + ۲ ف ما ی + ۲ گ ی لا + ۲ ھ لا ما = ۰

حوالے کے مثلث کے راسوں (۱، ۰، ۰)، (۰، ۱، ۰)، (۰، ۰، ۱) میں سے گذرتی ہے۔

تب ا = صفر، ب = صفر، ج = صفر

اس لیے مخروطی کی مساوات شکل

ف ما ی + گ ی لا + ھ لا ما = ۰

کی ہوگی۔

۲۳۔حوالے کے مثلث کے حائط دائرے کی مساوات

حوالے کے مثلث کے راسوں میں سے گذرنے والی کسی مخروطی تراش کی مساوات ہے

$$\text{ف ما ی} + \text{گ ی لا} + \text{ھ لا ما} = ۰$$

یہ مساوات دائرے کو تعبیر کرے گی اگر

$$\frac{\text{ف}}{\text{ا}^{۲}} = \frac{\text{گ}}{\text{ب}^{۲}} = \frac{\text{ھ}}{\text{ج}^{۲}}$$

اس لیے حوالے کے مثلث کے حائط دائرے کی مساوات ہے

$$\text{ا}^{۲}\text{ ما ی} + \text{ب}^{۲}\text{ ی لا} + \text{ج}^{۲}\text{ لا ما} = ۰$$

یعنی

$$\frac{\text{ا}^{۲}}{\text{لا}} + \frac{\text{ب}^{۲}}{\text{ما}} + \frac{\text{ج}^{۲}}{\text{ی}} = ۰$$

۲۴۔حوالے کے مثلث کے ضلعوں کو مس کرنے والے مخروطی کی مساوات

مخروطی $\text{ا لا}^{۲} + \text{ب ما}^{۲} + \text{ج ی}^{۲} + ۲\text{ف ما ی} + ۲\text{گ ی لا} + ۲\text{ھ لا ما} = ۰$ (i)

اور حوالے کے مثلث کے ضلعے ی = ۰ کے نقاط تقاطع پر

$$\text{ا لا}^{۲} + ۲\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^{۲} = ۰$$

اگر حوالے کے مثلث کا ضلع ی = ۰ مخروطی کو مس کرتا ہے تو دونوں نقاط تقاطع منطبق ہونگے۔اس لیے

$$\text{ھ}^{۲} = \text{ا ب}$$

اسی طرح چونکہ لا = ۰ اور ما = ۰ بھی مخروطی کو مس کرتے ہیں اس لیے

ف^{2} = ب ج اور گ^{2} = ج ا

اوپر کے رشتوں سے ظاہر ہے کہ ا، ب، ج تینوں کی ایک ہی علامت ہوگی ۔ ہم فرض کر سکتے ہیں کہ ا، ب، ج تینوں مثبت ہیں ۔

فرض کرو کہ ا = لہ^{2} ، ب = مہ^{2} ، ج = نہ^{2}

تب ف = ± مہ نہ ، گ = ± نہ لہ اور ھ = ± لہ مہ

اس لیے مساوات (ا) ہو جاتی ہے

لہ^{2} لا^{2} + مہ^{2} ما^{2} + نہ^{2} ی^{2} ± ۲ مہ نہ ما ی ± ۲ نہ لہ ی لا ± ۲ لہ مہ لا ما = صفر

اس مساوات میں مشتبہ علامتوں میں سے ایک منفی اور دو مثبت ہونی چاہئیں یا تینوں منفی ہونی چاہئیں کیونکہ تینوں علامتیں مثبت یا دو منفی اور ایک مثبت ہونے کی صورت میں اس مساوات کی دائیں جانب کا رکن مربع کامل ہوگا اور مخروطی کی بجائے منطبق خطوط کا ایک جوڑا حاصل ہوگا ۔

مساوات کو ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں :—

√(لہ لا) + √(مہ ما) + √(نہ ی) = صفر

اس مساوات میں جذر کی علامتوں میں سے ہر ایک کے آگے مشتبہ علامت لی جائے ۔

۲۵ - اس کے لیے شرط معلوم کرنا کہ خط مستقیم ل لا + م ما + ن ی = ۰ مخروطی √(لہ لا) + √(صہ ما) + √(نہ ی) = ۰ کو مس کرے ۔

خط مستقیم اور مخروطی کی مساواتوں میں سے ی کو ساقط کرنے سے حاصل

ہوتا ہے ۔

$$\left(\sqrt{\text{لہ لا}} + \sqrt{\text{مہ ما}}\right)^{2} = -\text{نہ} \times \frac{\text{ل لا} + \text{م ما}}{\text{ن}}$$

یعنی

$$\text{لہ لا} + \text{مہ ما} + ۲\sqrt{\text{لہ مہ لا ما}} = \frac{-\text{نہ}\,(\text{ل لا} + \text{م ما})}{\text{ن}}$$

یعنی

$$\text{لا}\left(\text{لہ} + \frac{\text{نہ ل}}{\text{ن}}\right) + ۲\sqrt{\text{لہ مہ لا ما}} + \text{ما}\left(\text{مہ} + \frac{\text{نہ م}}{\text{ن}}\right) = ۰$$

اگر خط مستقیم مخروطی کو مس کرتا ہے تو اوپر کی مساوات کی دائیں جانب کا رکن $\sqrt{\text{لا}}$ ، $\sqrt{\text{ما}}$ میں مربع کامل ہوگا۔

یعنی

$$\text{لہ مہ} = \left(\text{لہ} + \frac{\text{نہ ل}}{\text{ن}}\right)\left(\text{مہ} + \frac{\text{نہ م}}{\text{ن}}\right)$$

یعنی

$$\text{لہ م ن} + \text{مہ ن ل} + \text{نہ ل م} = \text{صفر}$$

یعنی

$$\frac{\text{لہ}}{\text{ل}} + \frac{\text{مہ}}{\text{م}} + \frac{\text{نہ}}{\text{ن}} = \text{صفر}$$

یہ تماس کی مطلوبہ شرط ہے ۔

۲۶ - اس مخروطی کی مساوات معلوم کرنا جس کے لحاظ سے حوالے کا مثلث خود قطبی Self polar ہو —

ہمیں ایسے مخروطی کی مساوات معلوم کرنا ہے جس کے لحاظ سے حوالے کے مثلث کا ہر ضلع مقابل کے راس کا قطبی ہو۔

مخروطی

$$\text{ا لا}^{2} + \text{ب ما}^{2} + \text{ج ی}^{2} + ۲\,\text{ف ما ی} + ۲\,\text{گ ی لا} + ۲\,\text{ھ لا ما} = ۰$$

کے لحاظ سے حوالے کے مثلث کے راس ا (۱، ۰، ۰) کے قطبی کی مساوات ہے

لیکن ا کے مقابل کے ضلع ب ج کی مساوات ہے لا = ۰

اس لیے　ھ = ۰　اور　گ = ۰

اسی طرح　ف = ۰

اس لیے مطلوبہ مخروطی کی مساوات ہے

$$\text{ا لا}^2 + \text{ب ما}^2 + \text{ج ی}^2 = 0$$

۷۱۔ ہم نے اس باب میں اب تک رقبیٔ محددوں اور ہندسۂ تحلیلی میں ان کے استعمال پر بحث کی ہے۔ ہم نے دیکھا ہے کہ رقبیٔ محددوں میں کسی منحنی کی مساوات متجانس شکل میں دیجا سکتی ہے۔

رقبیٔ محدد در اصل متجانس محددوں کے عام نظام کی ایک خاص شکل ہے۔ اب ہم متجانس محددوں کے عام نظام پر مختصر بحث کرینگے۔

فرض کرو کہ قائم یا مائل کارٹیزی محوروں کے حوالے سے کسی نقطہ ن کے محدد (لا، ما) ہیں۔

اگر ہم لکھیں

$$\text{لا} = \text{ل}_1\text{لا} + \text{م}_1\text{ما} + \text{ن}_1\text{ے}$$

اور　$$\text{ما} = \text{ل}_2\text{لا} + \text{م}_2\text{ما} + \text{ن}_2\text{ے}$$

جہاں ل_1، م_1، ن_1، ل_2، م_2، ن_2 دیے ہوئے مستقل ہیں اور لا، ما، ے رشتہ $\text{ء لا} + \text{بہ ما} + \text{نہ ے} = 1$ کے ذریعہ مربوط ہیں تو (لا، ما) کے جواب میں (لا، ما، ے) حاصل ہوتے ہیں جو نقطہ ن کے متجانس محدد کہلاتے ہیں۔

فی الحال (لا، ما، ے) محض اعداد ہیں جن کی مدد سے نقطہ ن کا مقام متعین ہوتا ہے۔ (لا، ما، ے) کے ہندسی معنیٰ پر متعاقب بحث کی جائیگی۔

اگر مستقلات لہ$_1$، لہ$_2$، مہ$_1$، مہ$_2$، نہ$_1$، نہ$_2$، عہ، بہ، جہ دیے گئے ہوں تو (لا، ما) کی رقوم میں ﻻ، ما، ے کی قیمتیں یگانہ طور پر حاصل ہونگی بشرطیکہ مقطعہ

لہ$_1$	مہ$_1$	نہ$_1$
لہ$_2$	مہ$_2$	نہ$_2$
عہ	بہ	جہ

≠ صفر

فرض کرو کہ یہ شرط پوری ہوتی ہے ۔ تب ہم لکھ سکتے ہیں

ﻻ = ا$_1$لا + ب$_1$ما + ج$_1$

ما = ا$_2$لا + ب$_2$ما + ج$_2$

ے = ا$_3$لا + ب$_3$ما + ج$_3$

نوٹ (i) رشتہ عہ ﻻ + بہ ما + جہ ے = ۱ کی مدد سے محددوں (ﻻ، ما، ے) میں ہر مساوات کو متجانس بنایا جا سکتا ہے ۔ اس خاصیت کی بنا پر ان محددوں کو متجانس محدد کہتے ہیں ۔

(ii) متجانس محددوں میں درجہ دوم کی عام مساوات شکل

ا ﻻ^2 + ب ما^2 + ج ے^2 + ۲ ف ما ے + ۲ گ ے ﻻ

+ ۲ ھ ﻻ ما = ۰ میں لکھی جا سکتی ہے ۔

۲۸ ۔ متجانس محددوں میں درجہ اول کی ہر مساوات ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے کیونکہ مساوات ل ﻻ + م ما + ن ے = صفر کو کارٹیزی محددوں (لا، ما) میں تحویل کرنے سے (لا، ما) میں درجہ اول کی مساوات حاصل ہوتی ہے ۔

بالخصوص مساواتوں ﻻ = ۰، ما = ۰، ے = ۰ سے تین خطوط مستقیم تعبیر ہوتے ہیں ۔ فرض کرو کہ ما = ۰ اور ے = ۰ کا نقطہ تقاطع ا ہے ۔

مے = ۰ اور لا = ۰ کا نقطہ تقاطع ب ہے۔
اور لا = ۰ اور ما = ۰ کا نقطہ تقاطع ج ہے۔
مثلث ا ب ج حوالے کا مثلث کہلاتا ہے۔

ا، ب، ج کے متجانس محدد ترتیب وار

(۱/عہ، ۰، ۰)، (۰، ۱/بہ، ۰)، (۰، ۰، ۱/جہ) ہیں۔

اور کارٹیزی محدد ترتیب وار

(لہ۱/عہ، لہ۲/عہ)، (مہ۱/بہ، مہ۲/بہ)، (نہ۱/جہ، نہ۲/جہ) ہیں۔

۲۹۔ مثلث کا رقبہ —

فرض کرو کہ ∆ ف ق ر کے راسوں کے متجانس محدد

(لا۱، ما۱، مے۱)، (لا۲، ما۲، مے۲)، (لا۳، ما۳، مے۳) ہیں۔

اور کارٹیزی محدد

(لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳) ہیں۔

اگر کارٹیزی محوروں کا درمیانی زاویہ سہ ہو تو ∆ ف ق ر کا رقبہ (جبکہ علامت کو بھی ملحوظ رکھا جائے)

= ½ جب سہ ×

لا۱	لا۲	لا۳
ما۱	ما۲	ما۳
۱	۱	۱

= ½ جب سہ ×

لہ۱لا۱ + مہ۱ما۱ + نہ۱مے۱	لہ۱لا۲ + مہ۱ما۲ + نہ۱مے۲	لہ۱لا۳ + مہ۱ما۳ + نہ۱مے۳
لہ۲لا۱ + مہ۲ما۱ + نہ۲مے۱	لہ۲لا۲ + مہ۲ما۲ + نہ۲مے۲	لہ۲لا۳ + مہ۲ما۳ + نہ۲مے۳
عہلا۱ + بہما۱ + جہمے۱	عہلا۲ + بہما۲ + جہمے۲	عہلا۳ + بہما۳ + جہمے۳

$$= \frac{1}{2}\text{جب سہ}\begin{vmatrix} \text{لا}_1 & \text{لا}_2 & \text{لا}_3 \\ \text{ما}_1 & \text{ما}_2 & \text{ما}_3 \\ \text{ے}_1 & \text{ے}_2 & \text{ے}_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{ل}_1 & \text{م}_1 & \text{ن}_1 \\ \text{ل}_2 & \text{م}_2 & \text{ن}_2 \\ \text{ل}_3 & \text{م}_3 & \text{ن}_3 \end{vmatrix}$$

اب حوالے کے مثلث ا ب ج کے رقبہ (مع علامت) کو Δ سے تعبیر کیا جائے تو

$$\Delta = \frac{1}{2}\text{جب سہ}\begin{vmatrix} \frac{1}{\text{عہ}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{\text{بہ}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{\text{جہ}} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{ل}_1 & \text{م}_1 & \text{ن}_1 \\ \text{ل}_2 & \text{م}_2 & \text{ن}_2 \\ \text{ل}_3 & \text{م}_3 & \text{ن}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\text{عہ بہ جہ}}\begin{vmatrix} \text{ل}_1 & \text{م}_1 & \text{ن}_1 \\ \text{ل}_2 & \text{م}_2 & \text{ن}_2 \\ \text{ل}_3 & \text{م}_3 & \text{ن}_3 \end{vmatrix}\text{جب سہ}$$

اس لیے Δ ف ق ر کا رقبہ (مع علامت)

$$= \text{عہ بہ جہ}\,\Delta\begin{vmatrix} \text{لا}_1 & \text{لا}_2 & \text{لا}_3 \\ \text{ما}_1 & \text{ما}_2 & \text{ما}_3 \\ \text{ے}_1 & \text{ے}_2 & \text{ے}_3 \end{vmatrix}$$

۳۰۔ مثلث کے رقبے کے ضابطے کی مدد سے اب ہم متجانس محددوں کی ہندسی تعبیر حاصل کرینگے —

اگر نقطہ ن کے متجانس محدد (لا، ما، ے) ہوں تو

$$\Delta\ \text{ن ب ج کا رقبہ} = \text{عہ بہ جہ}\,\Delta\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & \text{ے} \\ \cdot & \frac{1}{\text{بہ}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{\text{جہ}} \end{vmatrix} = \text{عہ}\,\Delta\,\text{لا}$$

$$\therefore \text{عہ}\,\text{لا} = \frac{\triangle\ \text{ن ب ج کا رقبہ}}{\triangle\ \text{ا ب ج کا رقبہ}}$$

$$\text{یعنی}\quad \text{لا} = \frac{1}{\text{عہ}} \times \frac{\triangle\ \text{ن ب ج کا رقبہ}}{\triangle\ \text{ا ب ج کا رقبہ}}$$

$$\text{اسی طرح}\quad \text{ما} = \frac{1}{\text{بہ}} \times \frac{\triangle\ \text{ن ج ا کا رقبہ}}{\triangle\ \text{ا ب ج کا رقبہ}}$$

$$\text{اور}\quad \text{ے} = \frac{1}{\text{جہ}} \times \frac{\triangle\ \text{ن ا ب کا رقبہ}}{\triangle\ \text{ا ب ج کا رقبہ}}$$

نوٹ - اگر عہ = بہ = جہ = ۱ تو متجانس محددوں کی خاص صورت کے طور پر رقبی محدد حاصل ہوتے ہیں۔

۳۱ - متجانس محددوں سے کارٹیزی محددوں میں تحویل ـــ

فرض کرو کہ حوالے کے مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج کے کارٹیزی محدد (لا_1، ما_1)، (لا_2، ما_2)، (لا_3، ما_3) ہیں۔

تب رشتوں

$$\text{لا} = \text{ل}_1\text{لا} + \text{م}_1\text{ما} + \text{ن}_1\text{ے}\ ؛$$

$$\text{ما} = \text{ل}_2\text{لا} + \text{م}_2\text{ما} + \text{ن}_2\text{ے}$$

سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{لا}_1 = \frac{\text{ل}_1}{\text{عہ}}،\quad \text{ما}_1 = \frac{\text{ل}_2}{\text{عہ}}\ ؛$$

$$\text{لا}_2 = \frac{\text{م}_1}{\text{بہ}}،\quad \text{ما}_2 = \frac{\text{م}_2}{\text{بہ}}\ ؛$$

$$\text{لا}_3 = \frac{\text{ن}_1}{\text{جہ}}،\quad \text{ما}_3 = \frac{\text{ن}_2}{\text{جہ}}$$

اس لیے متجانس محددوں کی رقوم میں کارٹیزی محدد معلوم کرنے کے لیے

عام ضابطے حسب ذیل ہیں :—

$$\text{لا} = \text{عہ}\ \text{لا}_1\ \text{لا} + \text{بہ}\ \text{لا}_2\ \text{ما} + \text{جہ}\ \text{لا}_3\ \text{ے}$$

$$\text{ما} = \text{عہ}\ \text{ما}_1\ \text{لا} + \text{بہ}\ \text{ما}_2\ \text{ما} + \text{جہ}\ \text{ما}_3\ \text{ے}$$

اگر حوالے کے مثلث ا ب ج کے اضلاع ج ب، ج ا کو حوالے کے محور مانا جائے تو ا، ب، ج کے کارٹیزی محدد ہونگے (۰، ب)، (ا، ۰)، (۰، ۰) اس لیے اس صورت میں

$$\text{لا} = \text{بہ}\ \text{ا}\ \text{ما}$$

$$\text{ما} = \text{عہ}\ \text{ب}\ \text{لا}$$

اِن رشتوں سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{لا} = \frac{1}{\text{عہ}} \times \frac{\text{ما}}{\text{ب}}$$

$$\text{ما} = \frac{1}{\text{بہ}} \times \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

$$\text{ے} = \frac{1}{\text{جہ}} \left(1 - \frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)$$

۳۲۔ حوالے کے مثلث کے ضلعوں ج ب، ج ا کو کارٹیزی محور مان کر مندرجۂ بالا تحویلی ضابطوں کی مدد سے حسب ذیل نتیجے آسانی سے حاصل کیے جا سکتے ہیں :—

(i) نقاط (لا_1، ما_1، ے_1)، (لا_2، ما_2، ے_2) کو ملانے والے خط مستقیم کی تقسیم ک : ل کی نسبت میں نقطہ ط پر کی جائے تو نقطہ ط کے محدد ہونگے

$$\left(\frac{\text{ک}\ \text{لا}_2 + \text{ل}\ \text{لا}_1}{\text{ک} + \text{ل}}،\ \frac{\text{ک}\ \text{ما}_2 + \text{ل}\ \text{ما}_1}{\text{ک} + \text{ل}}،\ \frac{\text{ک}\ \text{ے}_2 + \text{ل}\ \text{ے}_1}{\text{ک} + \text{ل}}\right)$$

(ii) نقاط (لا_1، ما_1، ے_1)، (لا_2، ما_2، ے_2) میں سے گذرنے والے

خط مستقیم کی مساواتیں ہیں

$$\frac{\text{لا}-\text{لا}_1}{\text{لا}_2-\text{لا}_1}=\frac{\text{ما}-\text{ما}_1}{\text{ما}_2-\text{ما}_1}=\frac{\text{ے}-\text{ے}_1}{\text{ے}_2-\text{ے}_1}$$

(iii) اگر نقطہ ن_1 (لا_1، ما_1، ے_1) میں سے ایک دی ہوئی سمت میں ایک خط مستقیم کھینچا جائے تو اس خط کی مساواتیں ہونگی

$$\frac{\text{لا}-\text{لا}_1}{\text{ل}}=\frac{\text{ما}-\text{ما}_1}{\text{م}}=\frac{\text{ے}-\text{ے}_1}{\text{ن}}=\text{ر}$$

جہاں نقطہ (لا_1، ما_1، ے_1) سے نقطہ (لا، ما، ے) کا فاصلہ (مع علامت) ر ہے اور ل، م، ن ایسے مستقل ہیں جو خط کی سمت پر منحصر ہیں اور رشتوں

عہ ل + بہ م + جہ ن = صفر

اور $\text{ا}^2\,\text{بہ جہ م ن}+\text{ب}^2\,\text{جہ عہ ن ل}+\text{ج}^2\,\text{عہ بہ ل م}=-1$

کو پورا کرتے ہیں۔

(iv) لاتناہی پر کے خط کی مساوات ہے

عہ لا + بہ ما + جہ ے = ۰

طالب علم کو چاہیے کہ مندرجہ بالا نتیجوں کے ثبوت مشق کے طور پر حاصل کرے۔

۲۳ - درجہ دوم کی عام مساوات —

متجانس محددوں میں درجہ دوم کی عام مساوات لکھی جا سکتی ہے

ف (لا، ما، ے) ≡ ا لا² + ب ما² + ج ے² + ۲ ف ما ے

+ ۲ گ ے لا + ۲ ھ لا ما = ۰

کارٹیزی محددوں میں تحویل کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ یہ مساوات ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے۔

رقبئی محددوں کی صورت میں جو طریقے اختیار کیے گئے ان کے مماثل طریقوں سے حسب ذیل نتیجے حاصل کیے جا سکتے ہیں :—

(ا) مخروطی ف (لا، ما، ے) = ۰ کے نقطہ (لا₁، ما₁، ے₁) پر کے مماس کی مساوات ہے

(ا لا₁ + ھ ما₁ + گ ے₁) لا + (ھ لا₁ + ب ما₁ + ف ے₁) ما

+ (گ لا₁ + ف ما₁ + ج ے₁) ے = ۰

نوٹ۔ نقطہ (لا₁، ما₁، ے₁) کے قطبی کی مساوات بھی یہی ہے۔ البتہ مماس کی صورت میں یہ ضروری ہے کہ نقطہ (لا₁، ما₁، ے₁) مخروطی پر ہو۔

(اا) خط مستقیم ل لا + م ما + ن ے = ۰ مخروطی ف (لا، ما، ے) = ۰ کو مس کریگا

اگر

ا	ھ	گ	ل
ھ	ب	ف	م
گ	ف	ج	ن
ل	م	ن	۰

= صفر

رقبی محددوں پر مشقی سوالات

۱ — اس خط مستقیم کی مساوات معلوم کرو جو خطوط

$$ل_۱ لا + م_۱ ما + ن_۱ مے = ۰ \quad \text{اور} \quad ل_۲ لا + م_۲ ما + ن_۲ مے = ۰$$

کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتا ہے اور حوالے کے مثلث کے ضلع ب ج کے متوازی ہے۔

۲ — ثابت کرو کہ حوالے کے مثلث کے ضلع لا = ۰ کے متوازی کسی خط کی مساوات ہے

$$لا = ک\,(لا + ما + مے)$$

جہاں ک اختیاری مستقل ہے۔

۳ — ثابت کرو کہ مساوات $\frac{لا^۲}{ا^۲} = \frac{ما^۲}{ب^۲} + \frac{مے^۲}{ج^۲}$ سے ناقص، مکافی یا زائد تعبیر ہوتا ہے بموجب اس کے کہ حوالے کے مثلث ا ب ج کا زاویہ ا منفرجہ، قائمہ یا حادہ ہے۔ حوالے کے مثلث کے ضلعوں کے طول ا، ب، ج ہیں۔

۴ — ثابت کرو کہ مساوات

$$ا^۲ ما مے + ب^۲ مے لا + ج^۲ لا ما = ۰$$

سے ایک دائرہ تعبیر ہوتا ہے۔

۵ — ثابت کرو کہ مخروطی $\sqrt{ل لا} + \sqrt{م ما} + \sqrt{ن مے} = ۰$ کے

مرکز کے محدد (مہ + نہ)، (نہ + لہ)، (لہ + مہ) کے متناسب ہیں۔

۶۔ثابت کرو کہ خط مستقیم ل لا + م ما + ن ی = ۰

مخروطی ا لا^{2} + ب ما^{2} + ج ی^{2} = ۰ کو مس کرتا ہے اگر

$$\frac{\text{ل}^{2}}{\text{ا}} + \frac{\text{م}^{2}}{\text{ب}} + \frac{\text{ن}^{2}}{\text{ج}} = ۰$$

۷۔ثابت کرو کہ حوالے کے مثلث کے عمودی مرکز کے رقبی محدد حسب ذیل ہیں:-

(مم ب مم ج، مم ج مم ا، مم ا مم ب)

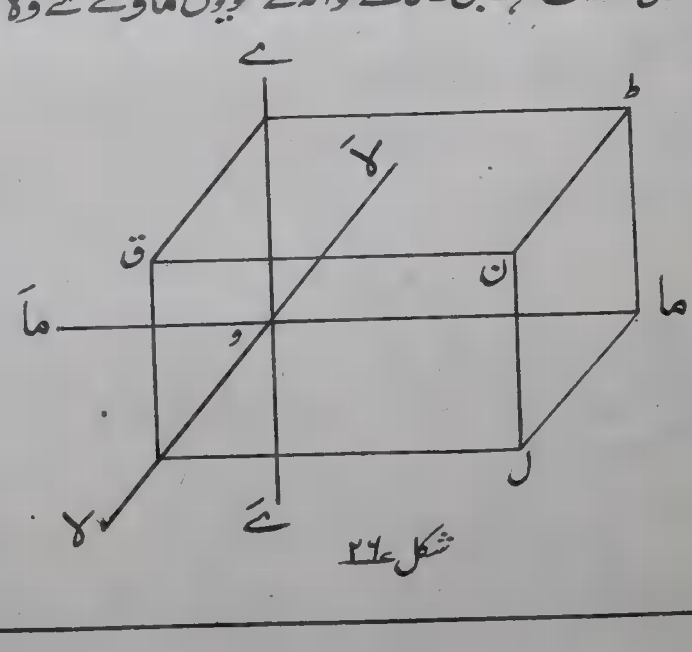
۸۔ثابت کرو کہ ہر ایسی مخروطی تراش جو حوالے کے مثلث راسوں میں سے اور حوالے کے مثلث کے عمودی مرکز میں سے گذرتی ہے ایک قائم زائد ہے۔

آٹھواں باب

نقطے ـ خط مستقیم ـ مستوی سطح

١ـ کارتیزی محدد ـــــ

تین باہم علی القوائم مستوی جو باہم عمود وار خطوط لاو لاَ ' ما و ماَ اور ے و ےَ پر قطع کرتے ہیں فضا کو آٹھ حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہر حصہ کو ثمن کہتے ہیں۔ مستویوں لا و ما ' ما و ے ' ے و لا کو حوالہ کے مستوی کہتے ہیں۔ فضا میں کوئی نقطہ ن ہے جس کے فاصلے حوالہ کے مستویوں ما و ے ' ے و لا ' لا و ما سے



شکل ۲۶

ترتیب وار ن ط، ن ق، ن ل ہیں۔ ان فاصلوں کو لا، ما، ی سے تعبیر کیا جاتا ہے اور یہ نقطہ ن کے قائم کارتیزی محدد کہلاتے اور علامت ن (لا، ما، ی) سے تعبیر کیے جاتے ہیں۔ چونکہ مستوی ما و ے میں لا محدد صفر ہوتا ہے اس لیے مستوی ما و ے کی مساوات ہے لا = ۰ اسی طرح حوالے کے مستویوں ے و لا اور لا و ما کی مساواتیں ہیں ما = ۰ اور ی = ۰

۲۔ قطبی محدد ——

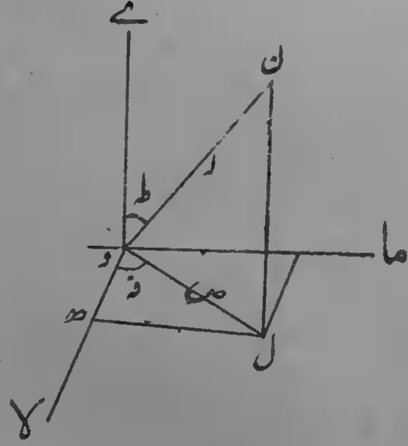
فضا میں ن کا مقام معلوم ہو جاتا ہے اگر فاصلہ و ن = ر، زاویہ ی و̂ ن = طہ، لا و̂ ل = فہ معلوم ہوں جہاں ل مستوی ی = ۰ پر نقطہ ن کا ظل ہے۔ (ر، طہ، فہ) کو ن کے قطبی محدد کہتے ہیں اور ہم لکھتے ہیں ن (ر، طہ، فہ)

شکل میں لا = وھ = ول جم فہ = ون جب طہ جم فہ = رجب طہ جم فہ ... (۱)

ما = ھ ل = ول جب فہ = ون جب طہ جب فہ = رجب طہ جب فہ .... (۲)

ی = ل ن = ون جم طہ = ر جم طہ .... (۳)

نیز $ر^۲ = ون^۲ = ول^۲ + ل ن^۲ = وھ^۲ + ھ ل^۲ + ل ن^۲ = لا^۲ + ما^۲ + ی^۲$ (۴)



شکل ۲۷

اور

$جم طہ = \frac{ی}{ر}$

اور

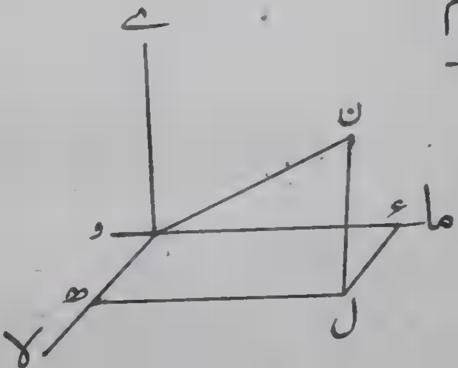
$مس فہ = \frac{ما}{لا}$

۳- اسطوانی محدد ـــــ

اگر ول = ص، ہو تو ل کے قطبی محدد مستوی لاما میں (ص، فہ) ہونگے۔ (ص، فہ، ی) کو ن کے **اسطوانی محدد** کہتے ہیں۔ اوپر کے رشتوں سے ظاہر ہے کہ لا = ص جم فہ، ما = ص جب فہ اور ص = رجب طہ۔

۴- خطِ مستقیم کی سمتی جیوب النمام ـــــ

کوئی خط ون حوالے کے محوروں ولا، وما، وے کی مثبت سمتوں سے ترتیب وار زاویے عہ، بہ، جہ بنائے تو جم عہ، جم بہ، جم جہ کو خط ون کی **سمتی جیوب التمام** کہتے ہیں۔ ان سمتی جیوب التمام کو عام طور پر ل، م، ن سے تعبیر کرتے ہیں۔



شکل ۲۸

بموجب شکل ۲۸

$$\text{ل} = \text{جم عہ} = \frac{\text{وھ}}{\text{ون}} = \frac{\text{لا}}{\text{ر}}$$

اسی طرح

$$\text{م} = \frac{\text{ما}}{\text{ر}} \quad \text{اور} \quad \text{ن} = \frac{\text{ی}}{\text{ر}}$$

اس لیے $\text{ل}^{۲} + \text{م}^{۲} + \text{ن}^{۲} = \text{جم}^{۲}\,\text{عہ} + \text{جم}^{۲}\,\text{بہ} + \text{جم}^{۲}\,\text{جہ} = ۱$ یہ بہت مشہور رشتہ ہے۔

اگر خط ون کی سمتی جیوب النمام ف، گ، ھ کے متناسب ہوں تو سمتی جیوب التمام آسانی کے ساتھ معلوم کی جاسکتی ہیں۔

$$\therefore \frac{ل}{ف} = \frac{م}{گ} = \frac{ن}{ھ} = \frac{1}{\sqrt{ف^2 + گ^2 + ھ^2}}$$

$$\therefore ل = \frac{ف}{\sqrt{ف^2 + گ^2 + ھ^2}} ، م = \frac{گ}{\sqrt{ف^2 + گ^2 + ھ^2}} ، ن = \frac{ھ}{\sqrt{ف^2 + گ^2 + ھ^2}}$$

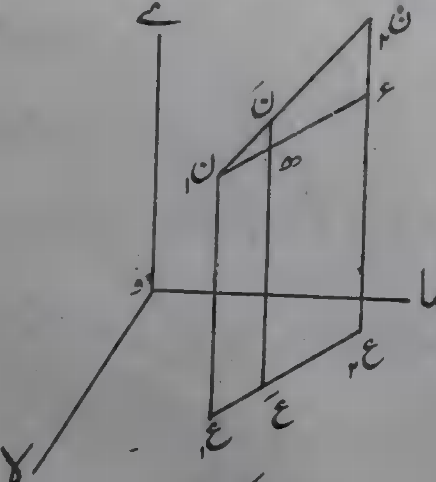
نوٹ (۱) کسی خط کے جو مبداء میں سے نہ گذرتا ہو سمتی جیوب التمام وہی ہوتے ہیں جو مبداء میں سے اس کے متوازی خط کے ہوتے ہیں۔

(۲) اگر $ن_1$ ($لا_1$، $ما_1$، $ی_1$) اور $ن_2$ ($لا_2$، $ما_2$، $ی_2$) کو ملانے والے خط کی سمتی جیوب التمام جم عہ، جم بہ، جم جہ ہوں تو محوروں کی سمتیں برقرار رکھ کر مبداء کو $ن_1$ پر منتقل کرنے سے $ن_2$ کے محدد بلحاظ مبداء $ن_1$ کے ($\overline{لا_2 - لا_1}$، $\overline{ما_2 - ما_1}$، $\overline{ی_2 - ی_1}$) ہونگے۔

اس لیے $جم\ عہ = \frac{لا_2 - لا_1}{ر}$، $جم\ بہ = \frac{ما_2 - ما_1}{ر}$، $جم\ جہ = \frac{ی_2 - ی_1}{ر}$

جہاں $ر = ن_1 ن_2$

یعنی $ر^2 = (لا_2 - لا_1)^2 + (ما_2 - ما_1)^2 + (ی_2 - ی_1)^2$



شکل ۲۹

۵ - نسبتی تقسیم

فرض کرو کہ $ن_1$ ($لا_1$، $ما_1$، $ی_1$) اور $ن_2$ ($لا_2$، $ما_2$، $ی_2$) دو دیے ہوئے نقطے ہیں۔ فرض کرو کہ $نَ$ ($لاَ$، $ماَ$، $یَ$) خط $ن_1 ن_2$ کو $م_1 : م_2$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ $نَ$ کے محدد مطلوب ہیں۔ نقاط $ن_1$، $نَ$، $ن_2$ سے محور ے کے متوازی خطوط کھینچو جو مستوی

لا و ما سے ع، عَ اور ع۲ پر ملتے ہیں۔ خطوط ن۱ ع، نَ عَ اور ن۲ ع۲ ہم مستوی ہیں۔ خط ن۱ ھ ۶ متوازی ہے ع۱ ع۲ کے اور نَ عَ اور ن۲ ع۲ سے بالترتیب ھ اور ۶ پر ملتا ہے۔

تب $\frac{\text{نَ ھ}}{\text{ن}_2\,\text{۶}} = \frac{\text{م}_2}{\text{م}_1+\text{م}_2} = \frac{\text{یَ}-\text{ی}_1}{\text{ی}_2-\text{ی}_1}$ ∴ $\text{یَ} = \frac{\text{م}_1\text{ی}_1+\text{م}_2\text{ی}_2}{\text{م}_1+\text{م}_2}$

اسی طرح $\text{لاَ} = \frac{\text{م}_1\text{لا}_1+\text{م}_2\text{لا}_2}{\text{م}_1+\text{م}_2}$ اور $\text{ماَ} = \frac{\text{م}_1\text{ما}_1+\text{م}_2\text{ما}_2}{\text{م}_1+\text{م}_2}$

نوٹ۔ اگر ن۱ ن۲ کی تقسیم نقطہ نَ پر خارجی ہو تو م۱، م۲ کی علامتیں مختلف ہونگی۔

۶۔ سطح کی مساوات

اگر مساوات ف (لا، ما، ی) = ۰ میں ی = ۰ رکھا جائے تو مستوی لا و ما میں ایک منحنی ف (لا، ما، ۰) = ۰ حاصل ہوگا۔ فرض کرو کہ اس منحنی پر کا کوئی نقطہ ط (لاَ، ماَ) ہے۔ مساوات ف (لا، ما، ی) میں لاَ، ماَ کی قیمتیں درج کرنے سے ی کی ایک یا ایک سے زیادہ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ ان میں سے کوئی ایک قیمت یَ ہے۔ ط سے ی۔محور کے متوازی خط پر نقطہ ن ایسا نقطہ لو کہ ط ن = یَ تو ن کا طریق عام طور پر ایک سطح ہوگی۔ پس ف (لا، ما، ی) = ۰ سے تین ابعادی فضا میں ایک سطح (مستوی یا منحنی) تعبیر ہوتی ہے۔ تین ابعادی فضا میں منحنی کے لیے دو مساواتیں دیجاتی ہیں۔ اگر سطحیں مستوی ہوں تو اُن کا خط تقاطع خط مستقیم ہونا چاہیے۔

اگر مساوات صرف ف (لا، ما) = ۰ تو تین ابعاد میں یہ ایک اسطوانہ کی مساوات ہوگی جس کا قاعدہ مستوی لا و ما میں منحنی ف (لا، ما) = ۰ ہے۔ مکون، محور ی کے متوازی ہیں۔ اگر مساوات ف (لا) = ۰ دیجائے اور اس کی اصلیں ع۱، ع۲، ع۳ . . . ہوں تو حاصل ہوتا ہے کہ

یعنی مساوات ف (لا) = ۰ (لا ۔ عہ) (لا ۔ عہ) (لا ۔ عہ) ..... = ۰ سے مستویوں کا ایک نظام لا = عہ، لا = عہ، لا = عہ ... حاصل ہوگا جو حوالے کی مستوی لا = ۰ کے متوازی ہیں۔ اس لیے تمام نقاط جن کے محدد ف (لا) = ۰ کو پورا کرتے ہیں مستویوں لا = عہ، لا = عہ، لا = عہ ... میں سے کسی ایک پر واقع ہونگے۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ قطبی محددوں میں ف (ر، طہ، فہ) = ۰ ایک (منحنی یا مستوی) سطح کو تعبیر کرتی ہے۔

خاص صورتیں :

ر = ا سے کرہ تعبیر ہوتا ہے جس کا مرکز مبدا، و ہے۔ طہ = عہ (مستقل) سے قائم مستدیر مخروط جس کا نصف راسی زاویہ عہ ہے اور محوری مخروط کے محور پر منطبق ہے، تعبیر ہوتا ہے۔ فہ = بہ (مستقل) سے ایک مستوی تعبیر ہوتا ہے جو ی۔ محور میں سے گذرتا ہے اور ان تینوں سے علی القوائم سطحوں کا ایک نظام بنتا ہے۔ اسی طرح اسطوانی محددوں میں ص = مہ اسطوانہ ہے۔ ی = مہ اور فہ = مہ دونوں مستوی ہیں۔ ان تینوں سے عمودوار سطحوں کا نظام بنتا ہے۔

۷۔ تظلیل

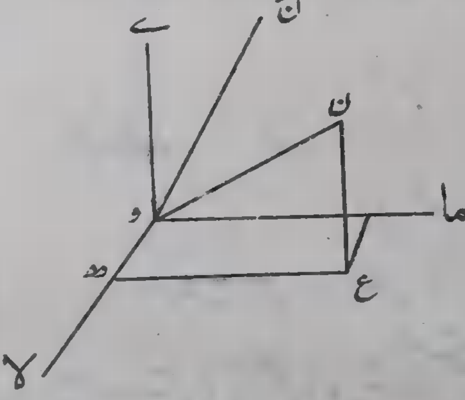
تین ابعادی ہندسۂ تحلیلی میں ذیل کے مثلوں کی ضرورت پڑتی ہے ثبوت کے لیئے طالب علم ہندسۂ مجسمات کی کسی مستند کتاب کا مطالعہ کرے۔

مسئلہ (۱) کسی محدود خط کا ظل کسی دوسرے خط پر مساوی ہوتا ہے محدود خط × جم طہ کے جہاں طہ دونوں خطوط کا درمیانی زاویہ ہے۔

مسئلہ (۲) کسی ٹوٹے ہوئے خط اب ج د ..... ن کا ظل فضا کے کسی دوسرے خط پر لیا جائے تو ان کا ظل اجزاء اب، ب ج، ج د ..... کے

ظلوں کے جبری مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

مسئلہ (۳) کسی مستوی رقبہ کا قائم ظل دوسرے مستوی پر مساوی ہوتا ہے
رقبہ × جم طہ کے جہاں طہ دونوں مستویوں کا درمیانی زاویہ
ہے۔



شکل ۳۰

مثال (۱) ن (لا، ما، ی)

فضا میں نقطہ ہے۔ ون کے اجزائے
وھ، ھع، ع ن یعنی لا، ما، ی
ہیں۔ اگر ون کی سمتی جیوب التمام
ل، م، ن ہوں تو ون کا ظل
محور۔ لا پر لینے سے

ل ر = لا جم ۰ + ما جم $\frac{\pi}{2}$ + ی جم $\frac{\pi}{2}$

یعنی لا = ل ر

اسی طرح ما = م ر، ی = ن ر

اور ٹوٹے ہوئے خط وھ ع ن کا ظل ون پر لینے سے

ر جم (۰) = لا ل + ما م + ی ن

یعنی ر = ل لا + م ما + ن ی

اگر خط ونَ پر ظل لیا جائے جس کی سمتی جیوب التمام لَ، مَ، نَ ہوں
اور ن و نَ = فہ ہو تو ر جم فہ = لَ لا + مَ ما + نَ ی

مثال (۲)

فرض کرو کہ فضا میں ن۱ ن۲ ن۳ ایک مثلث ہے جس کا
رقبہ Δ ہے۔ حوالے کے مستویوں لا = ۰، ما = ۰ اور ی = ۰ پر رقبہ کے ظل $\Delta_{لا}$، $\Delta_{ما}$، $\Delta_{ی}$

ہیں - اگر مستوی ن۱ ن۲ ن۳ پر کے عماد کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہوں تو

$$\Delta_{\text{لا}} = \text{ل}\,\Delta\text{،}\quad \Delta_{\text{ما}} = \text{م}\,\Delta\text{،}\quad \Delta_{\text{ی}} = \text{ن}\,\Delta$$

اس لیے $\Delta^2 = \Delta_{\text{لا}}^2 + \Delta_{\text{ما}}^2 + \Delta_{\text{ی}}^2$

نوٹ:- $$\Delta_{\text{لا}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{ما}_1 & \text{ی}_1 & 1 \\ \text{ما}_2 & \text{ی}_2 & 1 \\ \text{ما}_3 & \text{ی}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

اسی طرح $\Delta_{\text{ما}}$ اور $\Delta_{\text{ی}}$ کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

۸ - مستوی سطح اور خط مستقیم

(ا) مستوی سطح میں کسی دو نقطوں کو ملانے والا خط بالتمام اس مستوی پر واقع ہوتا ہے - اس تعریف کی مدد سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ مساوات

$$\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج}\,\text{ی} + \text{د} = 0$$

ایک مستوی کو تعبیر کرتی ہے - فرض کرو کہ طریق پر

$$\text{ن}_1\,(\text{لا}_1\text{،}\ \text{ما}_1\text{،}\ \text{ی}_1) \quad \text{اور} \quad \text{ن}_2\,(\text{لا}_2\text{،}\ \text{ما}_2\text{،}\ \text{ی}_2)$$

دو نقاط ہیں تو

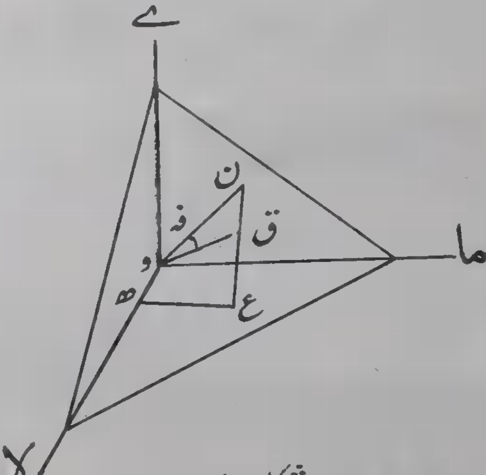
$$\text{ا}\,\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_1 + \text{ج}\,\text{ی}_1 + \text{د} = 0\text{،}\quad \text{ا}\,\text{لا}_2 + \text{ب}\,\text{ما}_2 + \text{ج}\,\text{ی}_2 + \text{د} = 0$$

ان کو بالترتیب $\frac{\text{م}_1}{\text{م}_1+\text{م}_2}$ اور $\frac{\text{م}_2}{\text{م}_1+\text{م}_2}$ سے ضرب دو اور جمع کرو - تب

$$\text{ا} \times \frac{\text{لا}_1\text{م}_1 + \text{لا}_2\text{م}_2}{\text{م}_1+\text{م}_2} + \text{ب} \times \frac{\text{ما}_1\text{م}_1 + \text{ما}_2\text{م}_2}{\text{م}_1+\text{م}_2} + \text{ج}\,\frac{\text{ی}_1\text{م}_1 + \text{ی}_2\text{م}_2}{\text{م}_1+\text{م}_2} + \text{د} = 0$$

اس سے پتہ چلتا ہے کہ اگر ن، ن۱ طریق پر ہوں تو ان کو ملانے والے خط پر کا کوئی نقطہ بھی طریق پر ہوتا ہے - اس لیے تعریف کی رو سے طریق مستوی ہے -

(ii) مستوی پر مبداء سے نکالے ہوئے عمود و ق کا طول ع۱ ہے اور اس عمود کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں تو مستوی کی مساوات معلوم کرنا ہے۔



شکل ۳۱ء

شکل ۳۱ء میں ن (لا، ما، ی) مستوی پر کا کوئی نقطہ ہے۔

چونکہ و ن کا ظل و ق پر لا، ما، ی کے ظلوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے

∴ و ن جم فہ = ع۱ = ل لا + م ما + ن ی

یہ مستوی کی مساوات کی عمودی شکل ہے (۱)

مساوات

ل لا + م ما + ن ی = ع۱ . . . . (۱) اور ا لا + ب ما + ج ی + د = ۰ کا مقابلہ کرنے سے

$$\frac{\text{ل}}{\text{ا}} = \frac{\text{م}}{\text{ب}} = \frac{\text{ن}}{\text{ج}} = \frac{-\text{ع}_1}{\text{د}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2}}$$

اس لیے عام مساوات میں لا، ما، ی کے سر ا، ب، ج مستوی پر کے عماد کی سمتی جیوب التمام کے متناسب ہوتے ہیں - اصلی جیوب التمام $\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2}}$، وغیرہ ہیں - نیز مبداء سے مستوی پر کے عمود کا طول ع۱ = $\frac{|\text{د}|}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2}}$ ہے -

(iii) اگر مستوی حوالے کے محوروں پر عہ، بہ، جہ طول والے مقطوعے قطع کرے تو مستوی کی مساوات معلوم کرنا -

اوپر کی شکل میں عہ ل = بہ م = جہ ن = ع۱

$$\therefore \quad \text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی} = \frac{\text{ع}_1 \text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{ع}_1 \text{ما}}{\text{بہ}} + \frac{\text{ع}_1 \text{ی}}{\text{جہ}} = \text{ع}_1$$

یعنی $\frac{\text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{بہ}} + \frac{\text{ی}}{\text{جہ}} = ۱$ یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

(۱۷) تین نقطوں ن_1، ن_2، ن_3 میں سے گذرنے والی مستوی سطح کی مساوات معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ مستوی $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج ی} + \text{د} = ۰$ پر نقاط $(\text{لا}_1، \text{ما}_1، \text{ی}_1)$، $(\text{لا}_2، \text{ما}_2، \text{ی}_2)$ اور $(\text{لا}_3، \text{ما}_3، \text{ی}_3)$ واقع ہیں۔ تب

$$\text{ا لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ج ی}_1 + \text{د} = ۰ \text{،} \quad \text{ا لا}_2 + \text{ب ما}_2 + \text{ج ی}_2 + \text{د} = ۰$$

اور $\text{ا لا}_3 + \text{ب ما}_3 + \text{ج ی}_3 + \text{د} = ۰$

ان چار مساواتوں سے ا، ب، ج، د کو ساقط کرنے سے

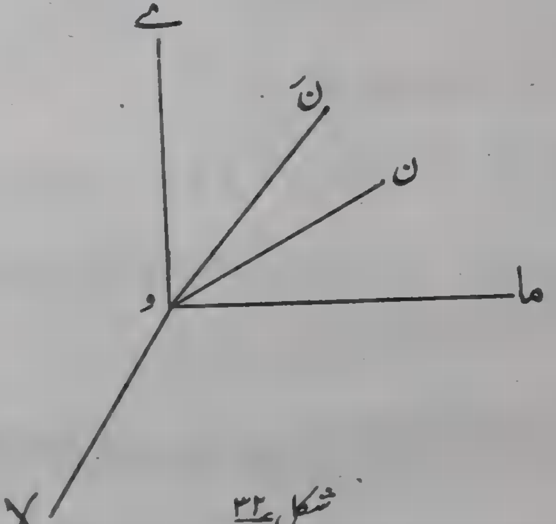
$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & \text{ی} & ۱ \\ \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & \text{ی}_1 & ۱ \\ \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & \text{ی}_2 & ۱ \\ \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & \text{ی}_3 & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

یہ دیے ہوئے تین نقطوں میں سے گذرنے والے مستوی کی مساوات ہے۔

نوٹ۔ اگر $\text{س} = ۰$ اور $\text{س}' = ۰$ دو مستویوں کی مساواتیں ہوں تو $\text{س} + \text{لہ س}' = ۰$ سے ایسی مستوی سطح تعبیر ہوتی ہے جو دیے ہوئے مستویوں کے خط تقاطع میں سے گذرتی ہے اور لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے ایسے مختلف مستوی حاصل ہوتے ہیں۔

(۷) دو خطوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ون اور ونَ مبداء میں سے گذرنے والے دو خط ہیں جن کی سمتی جیوب التمام ترتیب وار (ل، م، ن) اور (لَ، مَ، نَ) ہیں۔ (شکل ۳۲)



شکل ۳۲

ون = ر، ونَ = رَ اور ن وْ نَ = فہ

ون کا ظل ونَ پر = ر جم فہ = لَ لا + مَ ما + نَ ی

∴ جم فہ = لَ (لا/ر) + مَ (ما/ر) + نَ (ی/ر) = ل لَ + م مَ + ن نَ

[کیونکہ لا/ر = ل]

یہ خط باہم عمود وار ہوں تو فہ = π/۲ یعنی ل لَ + م مَ + ن نَ = صفر

نوٹ۔ جب فہ معلوم کرنے کے لیے ذیل کی متماثلہ کا استعمال ہوتا ہے جسے "لگرانج کا متماثلہ" کہتے ہیں۔

$$(\text{ل}^2+\text{م}^2+\text{ن}^2)(\text{ل}'^2+\text{م}'^2+\text{ن}'^2)-(\text{ل}\,\text{ل}'+\text{م}\,\text{م}'+\text{ن}\,\text{ن}')^2$$

$$\equiv(\text{م}\,\text{ن}'-\text{ن}\,\text{م}')^2+(\text{ن}\,\text{ل}'-\text{ل}\,\text{ن}')^2+(\text{ل}\,\text{م}'-\text{م}\,\text{ل}')^2$$

اگر ل، م، ن اور ل′، م′، ن′ سمتی جیوب التمام ہوں تو $\sum \text{ل}^2=\sum \text{ل}'^2=1$

$$\therefore 1-\text{جم}^2\,\text{فہ}=\text{جب}^2\,\text{فہ}=1-(\text{ل}\,\text{ل}'+\text{م}\,\text{م}'+\text{ن}\,\text{ن}')^2=(\text{م}\,\text{ن}'-\text{ن}\,\text{م}')^2$$

$$+(\text{ن}\,\text{ل}'-\text{ل}\,\text{ن}')^2+(\text{ل}\,\text{م}'-\text{م}\,\text{ل}')^2$$

اگر خطوط متوازی ہوں تو $\sum(\text{م}\,\text{ن}'-\text{ن}\,\text{م}')^2=0$

یعنی $\dfrac{\text{ل}}{\text{ل}'}=\dfrac{\text{م}}{\text{م}'}=\dfrac{\text{ن}}{\text{ن}'}$

(vii) دو مستویوں کا درمیانی زاویہ (طہ)۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے مستوی $\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}\,\text{ما}+\text{ج}\,\text{ی}+\text{د}=0$، $\text{ا}'\,\text{لا}+\text{ب}'\,\text{ما}+\text{ج}'\,\text{ی}+\text{د}'=0$ ہیں۔ مستویوں کا درمیانی زاویہ ان کے عمادوں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوتا ہے۔ عمادوں کی سمتی جیوب التمام ا، ب، ج اور ا′، ب′، ج′ کے متناسب ہیں۔

اس لیے $$\text{جم}\,\text{طہ}=\frac{\text{ا}\,\text{ا}'+\text{ب}\,\text{ب}'+\text{ج}\,\text{ج}'}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2}\,\sqrt{\text{ا}'^2+\text{ب}'^2+\text{ج}'^2}}$$

مستوی عمود وار ہونگے اگر

$$\text{ا}\,\text{ا}'+\text{ب}\,\text{ب}'+\text{ج}\,\text{ج}'=0$$

اور متوازی ہونگے اگر

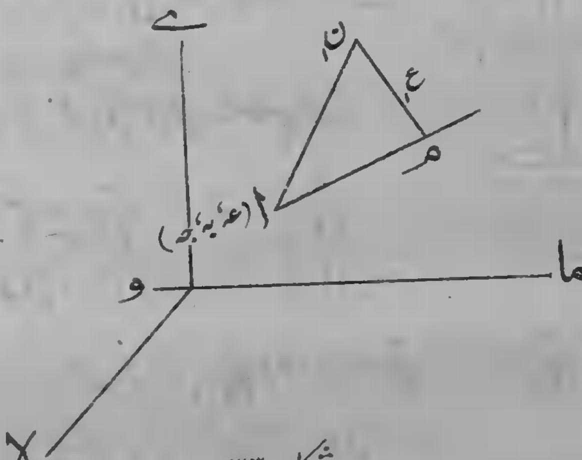
$$\frac{\text{ا}}{\text{ا}'}=\frac{\text{ب}}{\text{ب}'}=\frac{\text{ج}}{\text{ج}'}$$

(vii) بیرونی نقطے سے خط پر کے عمود کا طول۔

فرض کرو کہ خط مستقیم نقطہ ا (عہ، بہ، جہ) میں سے گذرتا ہے۔ اس کی سمتی جیوب التمام (ل، م، ن) ہیں۔ ن$_1$ (لا$_1$، ما$_1$، ی$_1$) ایک بیرونی نقطہ ہے جس سے عمود گرایا گیا ہے۔ عمود ع$_1$ کا طول مطلوب ہے۔

بموجب شکل ۳۳ ع$_1^2$ = ان$_1^2$ − ام^2

∵ ام، ان$_1$ کا ظل ہے



شکل ۳۳

اس لیے ام = ل (لا$_1$ − عہ) + م (ما$_1$ − بہ) + ن (ی$_1$ − جہ)

∴ ع$_1^2$ = (لا$_1$ − عہ)^2 + (ما$_1$ − بہ)^2 + (ی$_1$ − جہ)^2
− [ل (لا$_1$ − عہ) + م (ما$_1$ − بہ) + ن (ی$_1$ − جہ)]^2
ہے۔

نوٹ۔ لگرانج کے متماثلہ کو استعمال کر کے اس کی مزید تحویل کر سکتے ہیں۔

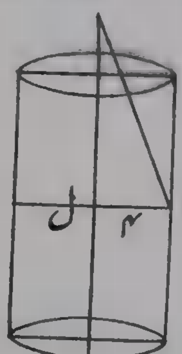
$$\because \quad \text{ل}^2 + \text{م}^2 + \text{ن}^2 = ۱$$

$$\therefore \quad \text{ع}_1^2 = (\text{ل}^2+\text{م}^2+\text{ن}^2)\left[\Sigma\, (\text{لا}_1 - \text{ع})^2\right] - \left[\Sigma\, \text{ل}\, (\text{لا}_1 - \text{ع})\right]^2$$

$$= \left[\text{م}\,(\text{ی}_1 - \text{جہ}) - \text{ن}\,(\text{ما}_1 - \text{بہ})\right]^2 + \left[\text{ن}\,(\text{لا}_1 - \text{ع}) - \text{ل}\,(\text{ی}_1 - \text{جہ})\right]^2$$

$$+ \left[\text{ل}\,(\text{ما}_1 - \text{بہ}) - \text{م}\,(\text{لا}_1 - \text{ع})\right]^2$$

توضیحی مثالیں۔



شکل ۳۴

(۱) ایک استوانہ کے محور کی سمتی جیوب التمام (۲، ۳، ۴) کے متناسب ہیں اور محور نقطہ (۱-، ۲، ۴) میں سے گذرتا ہے۔ اگر اسطوانہ کی عمودی تراش کا نصف قطر ۴ ہو تو اسطوانہ کی مساوات معلوم کرو۔

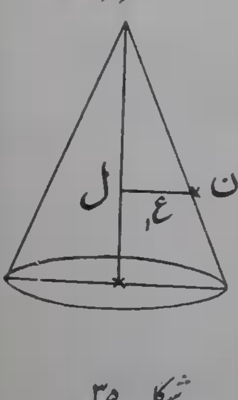
اگر ل، م، ن محور کی سمتی جیوب التمام ہوں تو

$$\text{ل} = \frac{۲}{\sqrt{۲۹}}، \quad \text{م} = \frac{۳}{\sqrt{۲۹}} \quad \text{اور} \quad \text{ن} = \frac{۴}{\sqrt{۲۹}}$$

اسطوانہ پر کوئی نقطہ ن (لا، ما، ی) ہو تو $\text{ان}^2 - \text{ال}^2 = ۴^2$

$$\text{یعنی} \; (\text{لا}+۱)^2 + (\text{ما}-۲)^2 + (\text{ی}-۴)^2 - \left[\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}(\text{لا}+۱) + \frac{۳}{\sqrt{۲۹}}(\text{ما}-۲) + \frac{۴}{\sqrt{۲۹}}(\text{ی}-۴)\right]^2 = ۱۶$$

جس کو مختصر کرنے سے مطلوبہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔



شکل ۳۵

(۲) ایک قائم مستدیر مخروط کا راس (۲، ۳، ۴) ہے۔ محور حوالے کے محوروں سے مساوی زاویے بناتا ہے۔ اگر مخروط کا نصف راسی زاویہ °۳۰ کا ہو تو مخروط کی مساوات معلوم کرو۔

چونکہ محور حوالے کے محوروں سے مساوی زاویے بناتا ہے،

$$\text{ل} = \text{م} = \text{ن} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

بموجب شکل ۳۵ ان۲ - ال۲ = ع۱۲ = (ان جب ۳۰°)۲ = ان۲ / ۴

∴ ۳/۴ ان۲ = ال۲

یعنی ۳/۴ [(لا-۲)۲ + (ما-۳)۲ + (ی-۴)۲] = ۱/۳ [(لا-۲) + (ما-۳) + (ی-۴)]۲

مختصر کرنے سے مطلوبہ مساوات حاصل ہوتی ہے -

(viii) سطح مستوی پر عمود -

نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) سے مستوی سطح ل لا + م ما + ن ی = ع پر کے عمود کا طول معلوم کرنا ہے جہاں (ل، م، ن) مستوی کے عماد کی سمتی جیوب التمام ہیں۔ نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) سے مستوی ل لا + م ما + ن ی - ع = ۰ کے متوازی کھینچے ہوئے مستوی کی مساوات ہوگی ل لا + م ما + ن ی = عَ جہاں عَ = ل لا۱ + م ما۱ + ن ی۱

اس مستوی پر مبداء سے گرائے ہوئے عمود کا طول ع۱ ہے -

مطلوبہ عمود = ع۱ - ع = ل لا۱ + م ما۱ + ن ی۱ - ع ہے

نوٹ (۱) اگر مستوی کی مساوات ا لا + ب ما + ج ی + د = ۰ ،

تو عمود کا طول = (ا لا۱ + ب ما۱ + ج ی۱ + د) / √(ا۲ + ب۲ + ج۲)

(۲) ن۱ (لا۱، ما۱، ی۱) اور ن۲ (لا۲، ما۲، ی۲)

خط ا لا + ب ما + ج ی + د = ۰ کے ایک جانب واقع ہونگے یا مخالف جانبوں میں بموجب اس کے کہ ا لا۱ + ب ما۱ + ج ی۱ + د اور ا لا۲ + ب ما۲ + ج ی۲ + د ہم علامت ہوں یا مختلف العلامت -

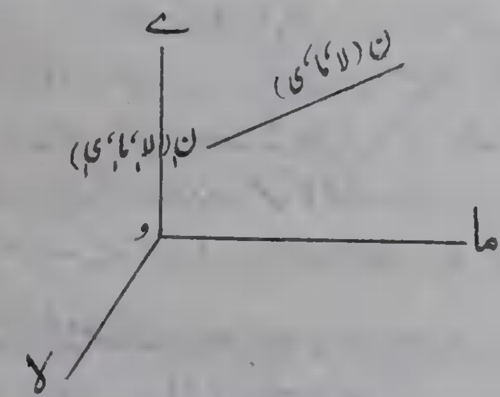
(۳) نقطہ (لا، ما، ی) کے فاصلے حوالے کے مستویوں ما و ے، ے و لا، لا و ما سے لا، ما، ی ہیں اور اس نقطہ کے فاصلے حوالہ کے محوروں و لا، و ما، و ے سے ترتیب وار

√(ما۲ + ی۲)، √(ی۲ + لا۲) اور √(لا۲ + ما۲) ہیں -

(ix) خط مستقیم کی مساواتیں۔

(ا) اس خط کی مساواتیں جو نقطہ (لا_1، ما_1، ی_1) میں سے گذرتا ہے اور جس کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں $\frac{\text{لا}-\text{لا}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ما}-\text{ما}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ی}-\text{ی}_1}{\text{ن}}$ ہے۔

فرض کرو کہ اس خط پر کا کوئی نقطہ ن (لا، ما، ی) ہے اور $\text{ن}_1\text{ن} = \text{ر}$



شکل ۳۶

تب $\text{لا}-\text{لا}_1 = \text{ل ر}$ ؛ $\text{ما}-\text{ما}_1 = \text{م ر}$ ؛ $\text{ی}-\text{ی}_1 = \text{ن ر}$

اس لیے خط کی مساواتیں ہیں

$$\frac{\text{لا}-\text{لا}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ما}-\text{ما}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ی}-\text{ی}_1}{\text{ن}} = \text{ر} \quad \text{.......... (ا)}$$

(اا) خط کی مساواتیں معلوم کرنا جبکہ وہ نقاط (لا_1، ما_1، ی_1) اور (لا_2، ما_2، ی_2) میں سے گذرے۔

(ا) سے خط کی مساواتیں $\frac{\text{لا}-\text{لا}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ما}-\text{ما}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ی}-\text{ی}_1}{\text{ن}}$ ہیں۔

چونکہ نقطہ $(\text{لا}_2, \text{ما}_2, \text{ی}_2)$ اس خط پر ہے اس لیے

$$\frac{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ما}_2 - \text{ما}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ی}_2 - \text{ی}_1}{\text{ن}}$$

اس لیے نقاط $(\text{لا}_1, \text{ما}_1, \text{ی}_1)$ اور $(\text{لا}_2, \text{ما}_2, \text{ی}_2)$ میں سے گذرنے والے خط کی مساواتیں $\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_1 - \text{لا}_2} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_1 - \text{ما}_2} = \frac{\text{ی} - \text{ی}_1}{\text{ی}_1 - \text{ی}_2}$ ہیں۔

نوٹ - اگر دو نقطوں کے محدد معلوم ہوں تو ان کو ملانے والے خط کی جیوب التمام متناظر محددوں کے فرقوں کے متناسب ہونگے۔ شکل

$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ی} - \text{ی}_1}{\text{ن}}$ کو خط کے متشاکل مساواتیں کہتے ہیں۔

اس شکل میں خط کے کسی نقطے کے محدد $\text{لا} = \text{لا}_1 + \text{ل ر}$ ؛ $\text{ما} = \text{ما}_1 + \text{م ر}$ ؛ $\text{ی} = \text{ی}_1 + \text{ن ر}$ ہیں۔

(iii) مستویوں $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج ی} + \text{د} = 0$

$\text{اَ لا} + \text{بَ ما} + \text{جَ ی} + \text{دَ} = 0$

کے خطِ تقاطع کی متشاکل مساواتیں حاصل کرو۔

مستوی $\text{ی} = 0$ اور خط کا نقطۂ تقاطع لو۔

تب $\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{د} = 0$ ، $\text{اَ لا} + \text{بَ ما} + \text{دَ} = 0$ سے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ب دَ} - \text{د بَ}} = \frac{\text{ما}}{\text{د اَ} - \text{ا دَ}} = \frac{1}{\text{ا بَ} - \text{ب اَ}}$$

اگر خط کے سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہوں تو خط دونوں مستویوں میں واقع ہے۔

$$\therefore \text{ا ل} + \text{ب م} + \text{ج ن} = 0 ، \text{اَ ل} + \text{بَ م} + \text{جَ ن} = 0$$

$$\therefore \frac{ل}{ب جَ - ج بَ} = \frac{م}{ج اَ - ا جَ} = \frac{ن}{ا بَ - ب اَ}$$

اِن رشتوں سے خط کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن حاصل ہوتے ہیں۔

نیز $لا_1 = \frac{ب دَ - د بَ}{ا بَ - ب اَ}$ ، $ما_1 = \frac{د اَ - ا دَ}{ا بَ - ب اَ}$ ، $ی_1 = ۰$

اس لیے خط کی تشاکل مساواتیں ہیں

$$\frac{لا - \frac{ب دَ - د بَ}{ا بَ - ب اَ}}{ب جَ - ج بَ} = \frac{ما - \frac{د اَ - ا دَ}{ا بَ - ب اَ}}{ج اَ - ا جَ} = \frac{ی - ۰}{ا بَ - ب اَ}$$

مثال - مستویوں $لا - ۳ما + ۲ی - ۱۷ = ۰$ ، $۲لا + ۳ما - ۴ی + ۱۴ = ۰$ کے خط تقاطع کی مساواتیں حاصل کرو۔

$ی = ۰$ رکھنے سے $لا - ۳ما = ۱۷$ ، $۲لا + ۳ما = -۱۴$ حاصل ہوتی ہیں۔

ان کو حل کرنے سے $لا = ۱$ ، $ما = -\frac{۱۶}{۳}$

اور خط کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہوں تو $ل - ۳م + ۲ن = ۰$ ،

$۲ل + ۳م - ۴ن = ۰$ سے حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{ل}{۶} = \frac{م}{۸} = \frac{ن}{۹}$

اس لیے خط کی مساواتیں $\frac{لا - ۱}{۶} = \frac{ما + \frac{۱۶}{۳}}{۸} = \frac{ی - ۰}{۹}$ ہیں۔

(x) ہم مستوی خطوط۔

اس کے لیے شرط معلوم کرنا ہے کہ خطوط $\frac{لا - عہ}{ل} = \frac{ما - بہ}{م} = \frac{ی - جہ}{ن}$

اور $\frac{لا - عہَ}{لَ} = \frac{ما - بہَ}{مَ} = \frac{ی - جہَ}{نَ}$ ہم مستوی ہوں۔

فرض کرو کہ یہ دونوں خط مستوی $لہ لا + مہ ما + نہ ی + د = ۰$ میں واقع ہیں۔

∵ مستوی نقطہ (عہ، بہ، جہ) سے گذرتا ہے، اس لیے

لہ (لا ـ عہ) + مہ (ما ـ بہ) + نہ (ی ـ جہ) = ۰ ...... (۱)

∵ مستوی نقطہ (عَہ، بَہ، جَہ) سے گذرتا ہے، اس لیے

لہ (عَہ ـ عہ) + مہ (بَہ ـ بہ) + نہ (جَہ ـ جہ) = ۰ ...... (۲)

∵ لہ، مہ، نہ مستوی کے عماد کی سمتی جیوب التمام ہیں اس لیے

لہ ل + مہ م + نہ ن = ۰ .... (۳)

لہ لَ + مہ مَ + نہ نَ = ۰ .... (۴)

پس مطلوبہ شرط رشتوں (۲)، (۳)، (۴) سے لہ، مہ، نہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ یعنی

$$\begin{vmatrix} \text{عَہ ـ عہ} & \text{بَہ ـ بہ} & \text{جَہ ـ جہ} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{لَ} & \text{مَ} & \text{نَ} \end{vmatrix} = 0$$

ان ہم مستوی خطوں میں سے گذرنے والے مستوی کی مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{لا ـ عہ} & \text{ما ـ بہ} & \text{ی ـ جہ} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{لَ} & \text{مَ} & \text{نَ} \end{vmatrix}$$ ہے۔

نوٹ:۔ اگر خطوط کی مساواتیں

ا$_{۱}$ لا + ب$_{۱}$ ما + ج$_{۱}$ ی + د$_{۱}$ = ۰ ؛ ا$_{۲}$ لا + ب$_{۲}$ ما + ج$_{۲}$ ی + د$_{۲}$ = ۰ اور
ا$_{۳}$ لا + ب$_{۳}$ ما + ج$_{۳}$ ی + د$_{۳}$ = ۰ ؛ ا$_{۴}$ لا + ب$_{۴}$ ما + ج$_{۴}$ ی + د$_{۴}$ = ۰ ہوں

اور یہ قطع کریں تو ان چاروں مستویوں میں ایک مشترک نقطہ (لا$_{۱}$، ما$_{۱}$، ی$_{۱}$) ہوگا یعنی

ا$_{۱}$ لا$_{۱}$ + ب$_{۱}$ ما$_{۱}$ + ج$_{۱}$ ی$_{۱}$ + د$_{۱}$ = ۰ ؛ ا$_{۲}$ لا$_{۱}$ + ب$_{۲}$ ما$_{۱}$ + ج$_{۲}$ ی$_{۱}$ + د$_{۲}$ = ۰ ؛
ا$_{۳}$ لا$_{۱}$ + ب$_{۳}$ ما$_{۱}$ + ج$_{۳}$ ی$_{۱}$ + د$_{۳}$ = ۰ اور ا$_{۴}$ لا$_{۱}$ + ب$_{۴}$ ما$_{۱}$ + ج$_{۴}$ ی$_{۱}$ + د$_{۴}$ = ۰

ان سے لا، ما، ی کو ساقط کرنے سے مطلوبہ شرط

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & \text{ج}_1 & \text{د}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & \text{ج}_2 & \text{د}_2 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & \text{ج}_3 & \text{د}_3 \\ \text{ا}_4 & \text{ب}_4 & \text{ج}_4 & \text{د}_4 \end{vmatrix} = \text{صفر حاصل ہوتی ہے۔}$$

(xi) دو کانے خطوں کے درمیان کم سے کم فاصلہ معلوم کرنا یعنی ان کے مشترک عمود کا طول معلوم کرنا۔

نوٹ - جن خطوں میں سے مستوی سطح نہ گذر سکے ان کو کانے خطوط کہتے ہیں یعنی یہ خطوط نہ قطع کرتے ہیں اور نہ ہم متوازی ہوتے ہیں البتہ ایک ایسا خط وجود رکھتا ہے جو ان دو خطوں میں سے ہر ایک پر عمود وار ہے اور یہ مشترک عمود ان دونوں کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے۔

فرض کرو کہ کانے خطوط

$$\frac{\text{لا}-\text{عہ}}{\text{ل}} = \frac{\text{ما}-\text{بہ}}{\text{م}} = \frac{\text{ی}-\text{جہ}}{\text{ن}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{لا}-\text{عہ}'}{\text{ل}'} = \frac{\text{ما}-\text{بہ}'}{\text{م}'} = \frac{\text{ی}-\text{جہ}'}{\text{ن}'} \quad \text{ہیں} \ldots\ldots (i)$$

اور مشترک عمود کی مساواتیں

$$\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{لہ}} = \frac{\text{ما}-\text{ب}}{\text{مہ}} = \frac{\text{ی}-\text{ج}}{\text{نہ}} \quad \text{ہیں} \ldots\ldots (ii)$$

(ا، ب، ج) اس مشترک عمود پر کے کسی نقطہ کے محدد ہیں۔

چونکہ خطوط (i)، خط (ii) سے ملتے ہیں اس لیے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}-\text{عہ} & \text{ب}-\text{بہ} & \text{ج}-\text{جہ} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{لہ} & \text{مہ} & \text{نہ} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{اور} \quad \begin{vmatrix} \text{ا}-\text{عہ}' & \text{ب}-\text{بہ}' & \text{ج}-\text{جہ}' \\ \text{ل}' & \text{م}' & \text{ن}' \\ \text{لہ} & \text{مہ} & \text{نہ} \end{vmatrix} = 0$$

نیز خط (ii)، خطوط (i) پر عمود وار ہے اس لیے

لہ ل + مہ م + نہ ن = ۰
لہ لَ + مہ مَ + نہ نَ = ۰ } .... (iii)

پس نقطہ (ا، ب، ج) کا طریق

| لا - عہ   ما - بہ   ی - جہ |
| ل   م   ن |
| لہ   مہ   نہ | = ۰ اور

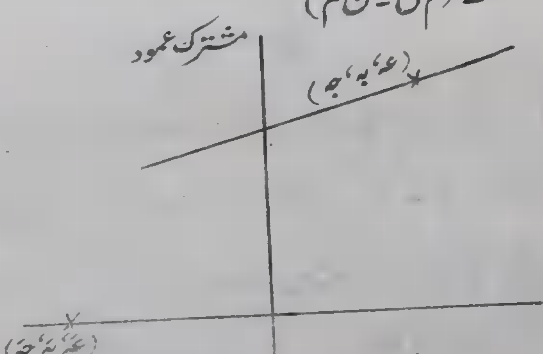
| لا - عہَ   ما - بہَ   ی - جہَ |
| لَ   مَ   نَ |
| لہ   مہ   نہ | = ۰

یعنی ان دو مستویوں کا خط تقاطع دیے ہوئے خطوں کا مشترک عمود ہے۔

مشترک عمود کا طول = (عہ - عہَ) لہ + (بہ - بہَ) مہ + (جہ - جہَ) نہ

جہاں (iii) سے لہ = (م نَ - ن مَ) / √Σ (م نَ - ن مَ)^۲ ، مہ = (ن لَ - ل نَ) / √Σ (م نَ - ن مَ)^۲

اور نہ = (ل مَ - م لَ) / √Σ (م نَ - ن مَ)^۲



شکل ۳۷

∴ مشترک عمود کا طول = [(عہ - عہَ)(م نَ - ن مَ) + (بہ - بہَ)(ن لَ - ل نَ) + (جہ - جہَ)(ل مَ - م لَ)] / √[(م نَ - ن مَ)^۲ + (ن لَ - ل نَ)^۲ + (ل مَ - م لَ)^۲]

توضیحی مثالیں:-

۱- ثابت کرو کہ خطوط

$$\frac{\text{لا}-\text{۳}}{\text{۱}}=\frac{\text{ما}+\text{۴}}{-\text{۳}}=\frac{\text{ی}-\text{۵}}{\text{۲}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{لا}-\text{۴}}{\text{۱}}=\frac{\text{ما}-\text{۵}}{\text{۳}}=\frac{\text{ی}+\text{۶}}{-\text{۴}}$$

قطع کرتے ہیں۔ نقطہ تقاطع کے محدد معلوم کرو اور نقطہ (۳، -۲، ۳) سے اس مستوی کا فاصلہ معلوم کرو جس میں یہ خطوط واقع ہیں۔

$$\therefore \text{ منقطعہ } \begin{vmatrix} \text{۱} & \text{۹} & -\text{۱۱} \\ \text{۱} & -\text{۳} & \text{۳} \\ \text{۱} & \text{۳} & -\text{۴} \end{vmatrix} = \text{۰}$$

اس لیے خطوط ہم مستوی ہیں یعنی قطع کرتے ہیں یا متوازی ہیں۔

ان میں سے گذرنے والی مستوی کی مساوات

$$\text{لہ}(\text{لا}-\text{۳})+\text{مہ}(\text{ما}+\text{۴})+\text{نہ}(\text{ی}-\text{۵})=\text{۰}$$

جہاں $\text{لہ}-\text{۳مہ}+\text{۳نہ}=\text{۰}$، $\text{لہ}+\text{۳مہ}-\text{۴نہ}=\text{۰}$

$$\therefore \frac{\text{لہ}}{\text{۳}}=\frac{\text{مہ}}{\text{۷}}=\frac{\text{نہ}}{\text{۶}}$$

لہذا مستوی کی مساوات $\text{۳}(\text{لا}-\text{۳})+\text{۷}(\text{ما}+\text{۴})+\text{۶}(\text{ی}-\text{۵})=\text{۰}$ ہے

یعنی $\text{۳لا}+\text{۷ما}+\text{۶ی}-\text{۱۱}=\text{۰}$ ....(۱)

نقطہ (۳، -۲، ۳) سے مستوی پر عمود $=\frac{\text{۲}}{\sqrt{\text{۹۴}}}$ ....(۲)

فرض کرو کہ خطوط (عہ، بہ، جہ) پر قطع کرتے ہیں۔

$$\therefore \frac{\text{عہ}-\text{۳}}{\text{۱}}=\frac{\text{بہ}+\text{۴}}{-\text{۳}}=\frac{\text{جہ}-\text{۵}}{\text{۲}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{عہ}-\text{۴}}{\text{۱}}=\frac{\text{بہ}-\text{۵}}{\text{۳}}=\frac{\text{جہ}+\text{۶}}{-\text{۴}}$$

ان سے حاصل ہوتا ہے $\text{۳عہ}=\text{۵}-\text{بہ}=\text{بہ}+\text{۷}$ یعنی $\text{بہ}=-\text{۱}$، $\text{عہ}=\text{۲}$ اور $\text{جہ}=\text{۲}$

یعنی نقطہ تقاطع (۲، -۱، ۲) ہے۔

۲۔ خطوط $\text{لا} + ۷ = ۱۸ - ۲\,\text{ما} = ۱۰\,\text{ی} - ۴۰$ اور $\text{لا} = ۲\,\text{ما} = ۲(۱ - \text{ی})$ کے درمیان مشترک عمود کا طول اور اس کی مساواتیں معلوم کرو۔

کانے خطوط کی مساواتیں ہیں $\frac{\text{لا}+۷}{۱۰} = \frac{\text{ما}-۹}{-۵} = \frac{\text{ی}-۴}{۱}$ اور $\frac{\text{لا}}{۲} = \frac{\text{ما}}{۱} = \frac{\text{ی}-۱}{-۱}$

$$\text{مشترک عمود کا طول} = \left| \frac{(-۷-۰)(۱-۵) + (۹-۰)(۲+۱۰) + (۴-۱)(۱۰+۱۰)}{\sqrt{(۱-۵)^۲ + (۲+۱۰)^۲ + (۱۰+۱۰)^۲}} \right|$$

$$= \left| \frac{-۲۸ + ۱۰۸ + ۶۰}{\sqrt{۱۶ + ۱۴۴ + ۴۰۰}} \right| = \frac{\sqrt{۱۴۰}}{۲} = ۵٫۹۱۶$$

مشترک عمود کی مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{لا}+۷ & \text{ما}-۹ & \text{ی}-۴ \\ ۱۰ & -۵ & ۱ \\ -۴ & -۱۲ & -۲۰ \end{vmatrix} = ۰ \quad \text{اور} \quad \begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & \text{ی}-۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ -۴ & -۱۲ & ۲۰ \end{vmatrix} = ۰$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

یعنی

$$\begin{vmatrix} \text{لا}+۷ & \text{ما}-۹ & \text{ی}-۴ \\ ۱۰ & -۵ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۵ \end{vmatrix} = ۰ \quad \text{اور} \quad \begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & \text{ی}-۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۵ \end{vmatrix} = ۰$$

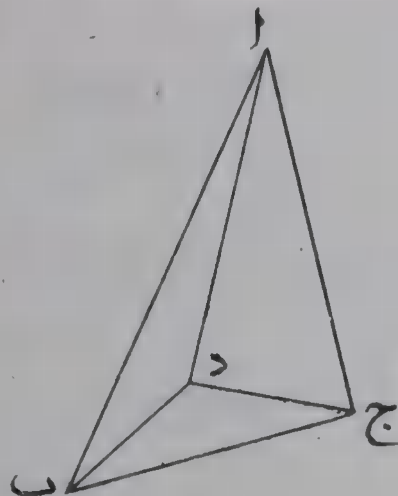
(xiii) چار سطحی کا حجم۔

فرض کرو کہ چار سطحی ا ب ج د کے راسوں کے محدد ترتیب وار $(\text{لا}_۱، \text{ما}_۱، \text{ی}_۱)$، $(\text{لا}_۲، \text{ما}_۲، \text{ی}_۲)$، $(\text{لا}_۳، \text{ما}_۳، \text{ی}_۳)$ اور $(\text{لا}_۴، \text{ما}_۴، \text{ی}_۴)$ ہیں۔

قاعدہ ب ج د کی مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & \text{ی} & ۱ \\ \text{لا}_۲ & \text{ما}_۲ & \text{ی}_۲ & ۱ \\ \text{لا}_۳ & \text{ما}_۳ & \text{ی}_۳ & ۱ \\ \text{لا}_۴ & \text{ما}_۴ & \text{ی}_۴ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

ہے



شکل ۳۸

یعنی $\text{لا}(2\Delta_{\text{لا}}) + \text{ما}(2\Delta_{\text{ما}}) + \text{ی}(2\Delta_{\text{ی}}) - \Delta' = 0$

جہاں $\Delta_{\text{لا}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{ما}_2 & \text{ی}_2 & 1 \\ \text{ما}_3 & \text{ی}_3 & 1 \\ \text{ما}_4 & \text{ی}_4 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$ ب ج د کا ظل لا = ۰ پر

اور $\Delta' = \begin{vmatrix} \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & \text{ی}_2 \\ \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & \text{ی}_3 \\ \text{لا}_4 & \text{ما}_4 & \text{ی}_4 \end{vmatrix}$

نقطہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1، \text{ی}_1)$ سے قاعدہ ب ج پر کے عمود کا طول

$$\text{ع} = \frac{2\text{لا}_1\Delta_{\text{لا}} + 2\text{ما}_1\Delta_{\text{ما}} + 2\text{ی}_1\Delta_{\text{ی}} - \Delta'}{\sqrt{4(\Delta_{\text{لا}}^2 + \Delta_{\text{ما}}^2 + \Delta_{\text{ی}}^2)}} = \frac{2\text{لا}_1\Delta_{\text{لا}} + 2\text{ما}_1\Delta_{\text{ما}} + 2\text{ی}_1\Delta_{\text{ی}} - \Delta'}{2\Delta}$$

$$\text{پس } ۲\Delta\,\text{ع} = ۲\,\text{لا}_۱\Delta_{\text{لا}} + ۲\,\text{ما}_۱\Delta_{\text{ما}} + ۲\,\text{ی}_۱\Delta_{\text{ی}} - \Delta' = \begin{vmatrix} \text{لا}_۱ & \text{ما}_۱ & \text{ی}_۱ & ۱ \\ \text{لا}_۲ & \text{ما}_۲ & \text{ی}_۲ & ۱ \\ \text{لا}_۳ & \text{ما}_۳ & \text{ی}_۳ & ۱ \\ \text{لا}_۴ & \text{ما}_۴ & \text{ی}_۴ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$\text{مگر چارسطحی کا حجم ح} = \tfrac{۱}{۳}\,\Delta\,\text{ع}$$

$$\text{پس حجم ح} = \frac{۱}{۶}\begin{vmatrix} \text{لا}_۱ & \text{ما}_۱ & \text{ی}_۱ & ۱ \\ \text{لا}_۲ & \text{ما}_۲ & \text{ی}_۲ & ۱ \\ \text{لا}_۳ & \text{ما}_۳ & \text{ی}_۳ & ۱ \\ \text{لا}_۴ & \text{ما}_۴ & \text{ی}_۴ & ۱ \end{vmatrix}$$

نوٹ :۔ اگر چارسطحی کا حجم صفر ہو تو دیئے ہوئے چار نقطے ہم مستوی ہونگے۔

مثال :۔ چارسطحی کے راسوں ا، ب، ج، د کے محدد بالترتیب (۱، ۲، ۳)، (۲، ۳، ۵)، (−۲، −۱، ۲) اور (۳، ۰، −۳) ہیں۔ حجم معلوم کرو۔

$$\text{مطلوبہ حجم} = \frac{۱}{۶}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۵ & ۱ \\ -۲ & -۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۰ & -۳ & ۱ \end{vmatrix} = \frac{۲۰}{۶} = \frac{۱۰}{۳} = ۳\tfrac{۱}{۳}$$

مشقی سوالات

۱۔ ایک مستوی نقطہ (۴، −۱، ۲) سے گذرتا ہے اور نقاط (۱، −۵، ۱۰) اور (۲، ۳، ۴) کو ملانے والے خط پر عمود وار ہے۔

مستوی کی مساوات معلوم کرو اور حوالہ کے مستویوں سے یہ جو زاویے بناتا ہے انھیں معلوم کرو۔

۲ — اگر ۴ لا - ۳ ما + ۷ ی = ۰ افقی مستوی کی مساوات ہو تو مبدا سے گذرنے والے انتصابی خط کی مساواتیں معلوم کرو۔ نیز مستوی سطح ۲ لا + ما - ۵ ی = ۰ میں اعظم میلان والے خط کی سمتی جیوب التمام دریافت کرو۔ (اعظم میلان والا خط افقی مستوی اور دیے ہوے مستوی کے خط تقاطع پر ⊥ ہوتا ہے)

۳ — $\frac{\text{لا}}{۲} = \frac{\text{ما}}{-۳} = \frac{\text{ی}}{۱}$ انتصابی خط ہے مستوی ۳ لا - ۲ ما + ی = ۵ میں اعظم میلان والے خط کی سمتی جیوب التمام معلوم کرو۔ نیز یہ خط افقی مستوی سے جو زاویہ بناتا اسے معلوم کرو۔

۴ — ثابت کرو کہ نقاط (۲، ۳، ۴)، (-۳، ۵، ۱)، (۴، -۱، ۲) سے گذرنے والی مستوی کی مساوات لا + ما - ی - ۱ = ۰ ہے۔ نیز ان زاویوں کو محسوب کرو جو اس کے عماد اور حوالہ کے محوروں کے درمیان بنتے ہیں۔

۵ — ثابت کرو کہ مستوی ۱۲ لا - ۱۵ ما + ۱۶ ی - ۲۸ = ۰،
۶ لا + ۶ ما - ۷ ی - ۸ = ۰، ۲ لا + ۳۵ ما - ۳۹ ی + ۱۲ = ۰
ہم خط ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ مستوی ۲ لا + ۳۵ ما - ۳۹ ی + ۱۲ = ۰ سے خط مستقیم $\frac{\text{لا}-۱}{۲} = \frac{\text{ما}}{-۲} = \frac{\text{ی}-۳}{۱}$ جس نقطہ پر ملتا ہے وہ باقی دونوں مستویوں سے مساوی فاصلوں پر واقع ہے۔

۶ — ایک مستوی نقطہ (۵، -۵، ۹) سے گذرتا ہے اور خط $\frac{\text{لا}-۳}{۶} = \frac{\text{ما}+۱}{۵} = \frac{\text{ی}-۷}{-۲}$ پر عمود وار ہے۔ نقطہ (۴، -۲، ۸) کا عمودی فاصلہ مستوی سے معلوم کرو اور جس نقطہ پر یہ عمود مستوی سے ملتا ہے اس کے محدد دریافت کرو۔

۷ — ثابت کرو کہ مستوی ۵ لا - ۱۰ ما - ۶ ی - ۲۹ = ۰ میں خطِ مستقیم $\frac{\text{لا}-۳}{۴} = \frac{\text{ما}+۳}{-۱} = \frac{\text{ی}-۱}{۵}$ واقع ہے۔ اس خطِ مستقیم اور

مستوی مذکور کے اندر جو اعظم میلان کا خط ہے ان کا درمیانی زاویہ معلوم کرو جبکہ لا ما مستوی کو افقی مان لیا جائے۔

۸۔ خط ۲ لا + ۲ ما ـ ی + ۱۵ = ۰ = ۴ ما + ی + ۲۹

اور (لا + ۴)/۴ = (ما ـ ۳)/(ـ۳) = (ی + ۲)/۱ کا درمیانی زاویہ محسوب کرو اور ان دونوں کے درمیان کم سے کم فاصلہ بھی معلوم کرو۔

۹۔ خطوط لا = ما + ۴ = ی/۲ اور (لا ـ ۱)/۳ = ما/۲ = ی کے درمیان مشترک عمود کا طول اور عمود کی مساواتیں معلوم کرو۔

۱۰۔ خطوط ۳ لا = ۵ ما = ی ـ ۲، لا + ۳ = ما = ۴ ی کے درمیان مشترک عمود کا طول معلوم کرو۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ مستوی ۲ لا ـ ۵ ما + ۱۱ ی = ۲۳
۸ لا + ۹ ما ـ ۳ ی = ۳۱، ۴ لا + ۲۲ ما ـ ۱۷ ی = ۲۹ ہم خط ہیں۔
اس خط کی سمتی جیوب التمام معلوم کرو۔

۱۲۔ چار سطحی کے راسوں کے محدد (۰، ۱، ۲)، (۲، ۳، ـ۵)، (ـ۱، ـ۲، ـ۴) اور (۳، ۵، ۷) ہیں۔ حجم معلوم کرو۔

۱۳۔ اس قائم مستدیر مخروط کی مساوات معلوم کرو جس کا راس نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر ہے، محور کی سمتی جیوب التمام (ل، م، ن) ہیں اور نصف راسی زاویہ ع ہے۔

۱۴۔ اس مستدیر مخروط کی مساوات معلوم کرو جس کا راس مبداء پر ہے، محور حوالہ کے محوروں سے مساوی زاویے بناتا ہے اور جو نقطہ (۳، ۲، ۵) میں سے گذرتا ہے۔

۱۵۔ ایک قائم مستدیر اسطوانہ کے محور کی مساواتیں ہیں

(لا ـ ۱)/۲ = (ما ـ ۲)/۳ = (ی ـ ۳)/۴ اور عمودی تراش کا نصف قطرہ ہے۔

اسطوانہ کی مساوات معلوم کرو۔

۱۶۔ فضا میں نقاط ا، ب، ج، د اس طرح واقع ہیں کہ اب عمود وار ہے ج د پر۔ ثابت کرو کہ

$$\text{اج}^2 + \text{بد}^2 = \text{اد}^2 + \text{بج}^2$$

نواں باب

دوسرے درجہ کی سطحیں

۱ — لا، ما، ی میں درجہ دوم کی عام مساوات

ف (لا، ما، ی) = ا لا^{۲} + ب ما^{۲} + ج ی^{۲} + ۲ ف ما ی + ۲ گ ی لا + ۲ ھ لا ما

+ ۲ ع لا + ۲ و ما + ۲ ک ی + د = ۰ دوسرے درجہ کی سطح کو تعبیر کرتی ہے۔

دوسرے درجہ کی سطح کو مخروطی نما کہتے ہیں کیونکہ اس کی ہر مستوی تراش ایک مخروطی ہے۔

نوٹ۔ ف (لا، ما، ی) کو علامت س سے بھی تعبیر کیا جاتا ہے۔

خط مستقیم $\frac{\text{لا} - \text{لا}_{۱}}{\text{ل}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_{۱}}{\text{م}} = \frac{\text{ی} - \text{ی}_{۱}}{\text{ن}}$ = ر. اِس سطح سے جن نقاط پر ملتا ہے ان کے محدد لا = لا$_{۱}$ + ل ر، وغیرہ ہونگے۔

اس لیے ا (لا$_{۱}$ + ل ر)^{۲} + ب (ما$_{۱}$ + م ر)^{۲} + ... = ۰

یعنی ر^{۲} (ا ل^{۲} + ب م^{۲} + ج ن^{۲} + ۲ ف م ن + ۲ گ ن ل + ۲ ھ ل م)

+ ر (ل $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}_{۱}}$ + م $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}_{۱}}$ + ن $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}_{۱}}$) + ف (لا$_{۱}$، ما$_{۱}$، ی$_{۱}$) = ۰ ...(۱)

جہاں $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}_1} = ۲\,(\text{ا لا}_1 + \text{ھ ما}_1 + \text{گ ی}_1 + \text{ع})$

$\text{ف}\,(\text{لا}_1، \text{ما}_1، \text{ی}_1) = \text{ا لا}_1^2 + \text{ب ما}_1^2 + \text{ج ی}_1^2 + ۲\,\text{ف ما}_1\text{ی}_1 + ۲\,\text{گ ی}_1\text{لا}_1 + ۲\,\text{ھ لا}_1\text{ما}_1$

$+ ۲\,\text{ع لا}_1 + ۲\,\text{و ما}_1 + ۲\,\text{ہ ی}_1 + \text{د}$

چونکہ یہ "ر" میں دوسرے درجہ کی مساوات ہے اس لیے خط، سطح سے دو نقاط پر ملتا ہے۔

نوٹ۔ تمام خطوط جو ہم مستوی ہوں سطح سے دو نقاط پر ملتے ہیں۔ اس لیے درجہ دوم کی سطح کی ہر مستوی تراشش ایک مخروطی ہے۔ اس لیے دوسرے درجہ کی سطحوں کو مخروطی نما کہتے ہیں۔

۲۔ مماسی مستوی کی مساوات، عماد کی مساواتیں

اگر (لا$_1$، ما$_1$، ی$_1$) مخروطی نما پر ہو تو ف (لا$_1$، ما$_1$، ی$_1$) = ۰

اس لیے مساوات (۱) کی ایک اصل صفر ہوتی ہے ——— (۲)

دونوں اصلیں صفر ہونگی جبکہ ف (لا$_1$، ما$_1$، ی$_1$) = ۰، اور

$\left(\text{ل}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}_1} + \text{م}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}_1} + \text{ن}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}_1}\right) = ۰$ ——— (۳)

اس صورت میں خط $\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ی} - \text{ی}_1}{\text{ن}}$ مماسی خط ہوگا

اور نقطہ تماس کے محدد (لا$_1$، ما$_1$، ی$_1$) ہونگے ——— (۴)

اگر (۳) اور (۴) سے ل، م، ن کو ساقط کیا جائے تو اس مستوی کی مساوات حاصل ہوگی جس میں تمام مماسی خط واقع ہیں۔

اس لیے (لا$_1$، ما$_1$، ی$_1$) پر کے مماسی مستوی کی مساوات

(لا - لا۱) (جف ف / جف لا۱) + (ما - ما۱) (جف ف / جف ما۱) + (ی - ی۱) (جف ف / جف ی۱) = ۰

ہے .....(۵)

اس مساوات کی صورت تفصیلی حسب ذیل ہے :-

لا (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ ی۱ + ع) + ما (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف ی۱ + و)
+ ی (گ لا۱ + ف ما۱ + ج ی۱ + ہ)
= لا۱ (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ ی۱ + ع) + ما۱ (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف ی۱ + و)
+ ی۱ (گ لا۱ + ف ما۱ + ج ی۱ + ہ)
= - (ع لا۱ + و ما۱ + ہ ی۱ + د) کیونکہ ف (لا۱، ما۱، ی۱) = ۰

اس لیے نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر کے مماسی مستوی کی مساوات ہے

لا (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ ی۱ + ع) + ما (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف ی۱ + و)
+ ی (گ لا۱ + ف ما۱ + ج ی۱ + ہ) + (ع لا۱ + و ما۱ + ہ ی۱ + د) = ۰

نیز نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر عماد کی مساواتیں

(لا - لا۱) / (جف ف / جف لا۱) = (ما - ما۱) / (جف ف / جف ما۱) = (ی - ی۱) / (جف ف / جف ی۱) ہیں ....(۶)

۳- قطبی مستوی کی مساوات

ف (لا، ما، ی) = ۰ کے نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر کے مماسی مستوی کی مساوات کی صورت تفصیلی حسب ذیل ہے :-

لا (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ ی۱ + ع) + ما (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف ی۱ + و)
+ ی (گ لا۱ + ف ما۱ + ج ی۱ + ہ) + (ع لا۱ + و ما۱ + ہ ی۱ + د) = ۰

اگر یہ مماسی مستوی کسی خاص نقطہ (عہ، بہ، جہ) سے گذرے تو

عہ (ا لا$_1$ + ھ ما$_1$ + گ ی$_1$ + ع) + بہ (ھ لا$_1$ + ب ما$_1$ + ف ی$_1$ + و)

+ جہ (گ لا$_1$ + ف ما$_1$ + ج ی$_1$ + ھ) + (ع لا$_1$ + و ما$_1$ + ہ ی$_1$ + د) = ۰

یعنی لا$_1$ (ا عہ + ھ بہ + گ جہ + ع) + ما$_1$ (ھ عہ + ب بہ + ف جہ + و)

+ ی$_1$ (گ عہ + ف بہ + ج جہ + ہ) + ع عہ + و بہ + ہ جہ + د = ۰

پس ان نقاط کا طریق جن پر کے مماسی مستوی نقطہ (عہ، بہ، جہ) میں سے گذرتے ہیں اوپر کی مساوات میں (لا$_1$، ما$_1$، ی$_1$) کے بجائے لا، ما، ی درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

یعنی لا (ا عہ + ھ بہ + گ جہ + ع) + ما (ھ عہ + ب بہ + ف جہ + و)

+ ی (گ عہ + ف بہ + ج جہ + ہ) + ع عہ + و بہ + ہ جہ + د = ۰

اس مستوی کو نقطہ (عہ، بہ، جہ) کا قطبی مستوی کہتے ہیں بلحاظ مخروطی نما کے۔

نوٹ (۱) (عہ، بہ، جہ) کے قطبی مستوی اور مخروطی نما کے منحنی تقاطع کے ہر نقطہ پر کا مماسی مستوی نقطہ (عہ، بہ، جہ) میں سے گذرتا ہے۔

(۲) اگر (عہ، بہ، جہ) مخروطی نما پر ہو تو قطبی مستوی مماسی مستوی پر منطبق ہوتا ہے۔

۴۔ تماس کی شرط

اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ مستوی ل لا + م ما + ن ی + ع = ۰ مخروطی نما ف (لا، ما، ی) = ۰ کو مس کرے۔

فرض کرو کہ دی ہوئی سطح ل لا + م ما + ن ی + ع = ۰

مخروطی تماف (لا، ما، ی) = ۰ کو نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر مس کرتی ہے۔
دفعہ (۲) کی رو سے نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر کے مماسی مستوی کی مساوات ہے۔

لا (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ ی۱ + ۶) + ما (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف ی۱ + و)

+ ی (گ لا۱ + ف ما۱ + ج ی۱ + ۸) + (۶ لا۱ + و ما۱ + ۸ ی۱ + د) = ۰

لیکن اسی مماسی مستوی کی مساوات ہے

ل لا + م ما + ن ی + ع = ۰

اس لیے ان دو مساواتوں میں نظیر کی رقموں کے سر متناسب ہونگے

یعنی
(ا لا۱ + ھ ما۱ + گ ی۱ + ۶) / ل = (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف ی۱ + و) / م

= (گ لا۱ + ف ما۱ + ج ی۱ + ۸) / ن = (۶ لا۱ + و ما۱ + ۸ ی۱ + د) / ع = لہ، فرض کرو

تب　ا لا۱ + ھ ما۱ + گ ی۱ + ۶ − ل لہ = ۰

ھ لا۱ + ب ما۱ + ف ی۱ + و − م لہ = ۰

گ لا۱ + ف ما۱ + ج ی۱ + ۸ − ن لہ = ۰

۶ لا۱ + و ما۱ + ۸ ی۱ + د − ع لہ = ۰

نیز چونکہ نقطہ تماس (لا۱، ما۱، ی۱) دی ہوئی سطح

ل لا + م ما + ن ی + ع = ۰　پر ہے

اس لیے

ل لا۱ + م ما۱ + ن ی۱ + ع = ۰

مندرجۂ بالا پانچ رشتوں میں سے چار نامعلوم مقداروں لا۱، ما۱، ی۱، لہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ء} & \text{گ} & \text{ھ} & \text{ا} \\ \text{م} & \text{و} & \text{ف} & \text{ب} & \text{ھ} \\ \text{ن} & \text{ہ} & \text{ج} & \text{ف} & \text{گ} \\ \text{ع} & \text{د} & \text{ہ} & \text{و} & \text{ء} \\ \text{۰} & \text{ع} & \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \end{vmatrix} = \text{۰}$$

جو تماس کی مطلوبہ شرط ہے۔

۵۔ مخروطی نما کی وہ مستوی تراش جس کا مرکز دیا گیا ہو۔

اگر (لا۱، ما۱، ی۱) خط اور مخروطی نما کے نقاط تقاطع کے درمیانی وقفہ کا وسطی نقطہ ہو تو مساوات (۱) کی اصلیں مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہونگی یعنی اصلوں کا جبری مجموعہ صفر ہوگا۔

یعنی
$$\text{ل}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}_1} + \text{م}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}_1} + \text{ن}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}_1} = \text{۰} \quad \ldots\ldots (\text{۶})$$

ل، م، ن کو خط کی مساوات $\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ی} - \text{ی}_1}{\text{ن}}$ کی مدد سے ساقط کرنے سے

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}_1} + (\text{ما} - \text{ما}_1)\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}_1} + (\text{ی} - \text{ی}_1)\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}_1} = \text{۰}$$

پس یہ مطلوبہ مستوی ہے جس میں وہ تمام وتر واقع ہیں جن کی تنصیف (لا۱، ما۱، ی۱) پر ہوتی ہے۔ یعنی یہ مستوی مخروطی نما کو ایک مخروطی پر قطع کرتی ہے جس کے مرکز کے محدد (لا۱، ما۱، ی۱) ہیں۔

نوٹ۔ یاد رہے کہ نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) مخروطی نما پر نہیں ہے۔ اس مساوات کو مختصر کرنے سے اس کو شکل $\text{ھ}_1 = \text{س}_1$ میں لکھ سکتے ہیں

جہاں
$$\text{ھ}_1 = \text{ا لا لا}_1 + \text{ب ما ما}_1 + \text{ج ی ی}_1 + \text{ف}(\text{ما ی}_1 + \text{ما}_1\text{ی}) + \text{گ}(\text{ی لا}_1 + \text{ی}_1\text{لا})$$
$$+ \text{ھ}(\text{لا ما}_1 + \text{لا}_1\text{ما}) + \text{ء}(\text{لا} + \text{لا}_1) + \text{و}(\text{ما} + \text{ما}_1) + \text{ہ}(\text{ی} + \text{ی}_1) + \text{د}$$

= لا (ا لا۱ + ھ ما۱ + گ ی۱ + ع) + ما (ھ لا۱ + ب ما۱ + ف ی۱ + و)
+ ی (گ لا۱ + ف ما۱ + ج ی۱ + ۸) + (ع لا۱ + و ما۱ + ۸ ی۱ + د)

اور س۱ = ف (لا۱، ما۱، ی۱)

۶- مخروطی نما کا مرکز

تعریف۔ اگر ایک ایسا نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) وجود رکھتا ہو کہ مخروطی نما ف (لا، ما، ی) = ۰ کے ہر وتر کی تنصیف جو (لا۱، ما۱، ی۱) میں سے گذرتا ہے (لا۱، ما۱، ی۱) پر ہوتی ہے تو نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) مخروطی نما ف (لا، ما، ی) = ۰ کا مرکز کہلاتا ہے۔

فرض کرو کہ مخروطی نما ف (لا، ما، ی) = ۰ کا مرکز (لا۱، ما۱، ی۱) ہے اور مرکز میں سے گذرنے والا کوئی خط ہے $\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ی} - \text{ی}_1}{\text{ن}} = \text{ر}$

تب اس خط اور مخروطی نما کے نقاط تقاطع پر (دفعہ ۱ کی رو سے)

$$\text{ر}^2 (\text{ا ل}^2 + \text{ب م}^2 + \text{ج ن}^2 + 2\,\text{ف م ن} + 2\,\text{گ ن ل} + 2\,\text{ھ ل م})$$
$$+ \text{ر} \left[\text{ل} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}_1} + \text{م} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}_1} + \text{ن} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}_1}\right] + \text{ف} (\text{لا}_1، \text{ما}_1، \text{ی}_1) = 0$$

چونکہ ل، م، ن کی تمام قیمتوں کے لیے وتر کا وسطی نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) ہے، اس لیے ر میں مندرجہ بالا درجہ دوم کی مساوات کی اصلیں مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہونگی

یعنی مساوات کی اصلوں کا مجموعہ صفر ہوگا ل، م، ن کی تمام قیمتوں کے لیے۔

اس لیے
$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}_1} = 0، \quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}_1} = 0، \quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}_1} = 0$$

یعنی (ا لا، + ھ ما، + گ ی، + ع) = ۰ ' (ھ لا، + ب ما، + ف ی، + و) = ۰ '

(گ لا، + ف ما، + ج ی، + ٤) = ۰

اگر مندرجۂ بالا ہمزاد مساواتوں کا حل وجود رکھتا ہے تو نقطہ (لا، ' ما، ' ی،) مخروطی نما ف (لا ' ما ' ی) = ۰ کا مرکز ہوگا۔

تعریف۔ ایسا مخروطی نما جس کا مرکز وجود رکھتا ہے **مرکز دار مخروطی نما** کہلاتا ہے۔

۷۔ مخروطی نما کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق

فرض کرو کہ مخروطی نما ف (لا ' ما ' ی) = ۰ کے وتروں کا ایک نظام ہے جن میں سے ہر ایک وتر خط $\frac{\text{لا}}{\text{ل}} = \frac{\text{ما}}{\text{م}} = \frac{\text{ی}}{\text{ن}}$ کے متوازی ہے۔

فرض کرو کہ ایسے کسی وتر کا وسطی نقطہ (لا، ' ما، ' ی،) ہے۔

تب وتر کی مساواتیں ہونگی

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ی} - \text{ی}_1}{\text{ن}} = \text{ر} \qquad (1)$$

اس لیے وتر اور مخروطی نما کے نقاط تقاطع پر

$$\text{ر}^2 \,(\text{ا ل}^2 + \text{ب م}^2 + \text{ج ن}^2 + 2\,\text{ف م ن} + 2\,\text{گ ن ل} + 2\,\text{ھ ل م})$$

$$+ \text{ر} \left[\text{ل} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}_1} + \text{م} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}_1} + \text{ن} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}_1} \right] + \text{ف}\,(\text{لا}_1 ' \text{ما}_1 ' \text{ی}_1) = 0$$

چونکہ وتر کا وسطی نقطہ (لا، ' ما، ' ی،) ہے

$$\text{اس لیے} \quad \text{ل} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}_1} + \text{م} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}_1} + \text{ن} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}_1} = 0$$

اس لیے خط مستقیم (۱) کے متوازی کھنچے ہوئے وتروں کے وسطی نقطوں کے طریق کی مساوات ہوگی

$$\text{ل}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \text{م}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \text{ن}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} = \cdot \quad \ldots\ldots (\text{۲})$$

نوٹ ۔ دفعہ (۶) سے معلوم ہوتا ہے کہ ل، م، ن کی تمام قیمتوں کے لیے مندرجہ بالا مستوی (۲) مخروطی نما کے مرکز میں سے گذرتا ہے

کیونکہ مرکز پر $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} = \cdot$، $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} = \cdot$، $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} = \cdot$

پس معلوم ہوا کہ مرکزدار مخروطی نما کے متوازی وتروں کے ہر نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک مستوی ہے جو مخروطی نما کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔

تعریف (۱) مخروطی نما کے مرکز میں سے گذرنے والی ہر مستوی مخروطی نما کا ایک **قطری مستوی** کہلاتا ہے۔

(۲) اگر مخروطی نما کے متوازی وتروں کے جواب کا قطری مستوی (یعنی مرکز میں سے گذرنے والا وہ مستوی جس پر ان متوازی وتروں کے وسطی نقطے واقع ہیں) نظام کے وتروں پر عمود وار ہو تو اس قطری مستوی کو مخروطی نما کا **صدر مستوی** کہتے ہیں۔

۸ ۔ قطبی خط ــــ

دفعہ (۳) کی رو سے مخروطی نما ف (لا، ما، ی) = ۰ کے لحاظ سے نقطہ ا (لا₁، ما₁، ی₁) کے قطبی مستوی کی مساوات ہے

لا (ا لا₁ + ھ ما₁ + گ ی₁ + ع) + ما (ھ لا₁ + ب ما₁ + ف ی₁ + و)

+ ی (گ لا₁ + ف ما₁ + ج ی₁ + ہ) + (ع لا₁ + و ما₁ + ہ ی₁ + د) = ۰

یعنی ا لا لا۱ + ب ما ما۱ + ج ی ی۱ + ف (ما ی۱ + ما۱ ی) + گ (ی لا۱ + ی۱ لا)
+ ھ (لا ما۱ + لا۱ ما) + ع (لا + لا۱) + و (ما + ما۱) + ک (ی + ی۱) + د = ۰

اگر یہ قطبی مستوی نقطہ ب (لا۲، ما۲، ی۲) میں سے گذرتا ہے

تو ا لا۱ لا۲ + ب ما۱ ما۲ + ج ی۱ ی۲ + ف (ما۱ ی۲ + ما۲ ی۱) + گ (ی۱ لا۲ + ی۲ لا۱)
+ ھ (لا۱ ما۲ + لا۲ ما۱) + ع (لا۱ + لا۲) + و (ما۱ + ما۲) + ک (ی۱ + ی۲) + د = ۰

یہ شرط متشاکل ہے بلحاظ (لا۱، ما۱، ی۱)، (لا۲، ما۲، ی۲) کے - یعنی اس شرط میں کوئی تبدیلی نہیں ہوگی اگر (لا۱، ما۱، ی۱) کی بجائے (لا۲، ما۲، ی۲) اور (لا۲، ما۲، ی۲) کی بجائے (لا۱، ما۱، ی۱) لکھے جائیں - اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر نقطہ ا (لا۱، ما۱، ی۱) کا قطبی مستوی نقطہ ب (لا۲، ما۲، ی۲) میں سے گذرے تو نقطہ ب کا قطبی مستوی نقطہ ا میں سے گذریگا - ایسے دو نقطے **مزدوج نقطے** کہلاتے ہیں -

مندرجہ بالا خاصیت سے یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر دو خطوط مستقیم ل۱، ل۲ ایسے ہوں کہ خط ل۱ کے ہر نقطہ کا قطبی مستوی خط ل۲ میں سے گذرتا ہے تو خط ل۲ کے ہر نقطہ کا قطبی مستوی خط ل۱ میں سے گذریگا - ایسے دو خط دیے ہوئے مخروطی کے لحاظ سے **قطبی خط** کہلاتے ہیں -

نوٹ - آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر خط ل۱ پر کے صرف دو نقطوں کے قطبی مستوی خط ل۲ میں سے گذرتے ہیں تو خطوط ل۱ اور ل۲ قطبی خط ہونگے -

مشقی سوال (۱) مخروطی نماف (لا، ما، ی) = ۰ کے لحاظ سے خط مستقیم

(لا - عہ)/ل = (ما - بہ)/م = (ی - جہ)/ن کے قطبی خط کی مساواتیں معلوم کرو -

اشارہ ۔ مطلوبہ خط دیے ہوئے خط پر کے کسی دو نقطوں مثلاً (عہ، بہ، جہ) اور (عہ + ل، بہ + م، جہ + ن) کے قطبی مستویوں کا خط تقاطع ہے۔

مشقی سوال (۲)۔ اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ ذیل کے دو خط مخروطی نما ف (لا، ما، ی) = ۰ کے لحاظ سے قطبی خط ہوں۔

$$\frac{\text{لا}-\text{عہ}}{\text{ل}}=\frac{\text{ما}-\text{بہ}}{\text{م}}=\frac{\text{ی}-\text{جہ}}{\text{ن}}$$

$$\frac{\text{لا}-\text{عہَ}}{\text{لَ}}=\frac{\text{ما}-\text{بہَ}}{\text{مَ}}=\frac{\text{ی}-\text{جہَ}}{\text{نَ}}$$

اشارہ۔ دیے ہوئے دو خط قطبی خط ہونگے اگر ایک خط پر کے کسی دو نقطوں کے قطبی مستویوں پر دوسرا خط پورا پورا واقع ہو۔

۹۔ گردشی سطحیں —

فرض کرو کہ ایک منحنی کی مساواتیں ہیں لا = ۰، ف (ما، ی) = ۰
یہ منحنی وما، وے کی سطح میں واقع ہے۔ اگر اس منحنی پر کا کوئی نقطہ ن (۰، ما، ی) ہو تو ی۔ محور سے اس نقطہ ن کا عمودی فاصلہ = ما

فرض کرو کہ اس منحنی کو ی۔ محور کے گرد گھمایا گیا ہے اور ن کا نیا مقام نَ (لاَ، ماَ، یَ) ہے۔ تب ی۔ محور سے نَ کا عمودی فاصلہ = $\sqrt{\text{لاَ}^2+\text{ماَ}^2}$

لیکن ی۔ محور سے ن کا عمودی فاصلہ = ی۔ محور سے نَ کا عمودی فاصلہ

$$\therefore \text{ما}=\sqrt{\text{لاَ}^2+\text{ماَ}^2}$$

نیز　ی = یَ

چونکہ　ف (ما، ی) = ۰

$\therefore$　ف $\left(\sqrt{\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2}\text{، یَ}\right) = 0$

اس لیے نَ کے طریق کی مساوات یعنی اس گردشی سطح کی مساوات جو منحنی لا = ۰، ف (ما، ی) = ۰ کو ی-محور کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتی ہے حسب ذیل ہوگی:—

$$\text{ف}\left(\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}\text{، ی}\right) = 0$$

اسی طرح دیے ہوئے منحنی کو ما-محور کے گرد گھمانے سے جو گردشی سطح حاصل ہوتی ہے اس کی مساوات ہوگی

$$\text{ف}\left(\text{ما، }\sqrt{\text{ی}^2 + \text{لا}^2}\right) = 0$$

اسی طرح کسی منحنی کو جو سطح ما = ۰ میں واقع ہو لا-محور یا ی-محور کے گرد گھمانے سے جو گردشی سطحیں حاصل ہوتی ہیں ان کی مساواتیں حاصل کیجا سکتی ہیں۔

نیز کسی منحنی کو جو سطح ی = ۰ میں واقع ہو لا-محور یا ما-محور کے گرد گھمانے سے جو گردشی سطحیں حاصل ہوئی ہیں ان کی مساواتیں حاصل کیجا سکتی ہیں۔

مثال۔ مکافی ی = ۰، $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا لا}$ کو لا-محور کے گرد گھمانے سے جو گردشی سطح حاصل ہوتی ہے اس کی مساوات ہوگی

$$\text{ما}^2 + \text{ی}^2 = 4\,\text{ا لا}$$

یہ گردشی سطح، گردشی مکافی نما کہلاتی ہے۔

۱۰۔ کسی مخروطی کو محور تشاکل کے گرد گھمانے سے جو گردشی سطح حاصل ہوتی ہے اس کو **گردشی مخروطی نما** کہتے ہیں۔

آسانی سے تصدیق کیجا سکتی ہے کہ ہر گردشی مخروطی نما کی مساوات درجہ دوم کی ہوتی ہے۔

نوٹ۔ غور سے دیکھا جائے کہ کسی مخروطی کو ایسے خط کے گرد جو مخروطی کے مستوی میں واقع ہو لیکن مخروطی کا محور تشاکل نہ ہو گھمایا جائے تو حاصل ہونے والی گردشی سطح کی مساوات درجہ دوم کی نہیں ہوگی۔ اس لیے اس گردشی سطح کو گردشی مخروطی نما نہیں کہا جا سکتا۔

مثالیں۔

(۱) مساواتوں لا = ۰، ما^2 = ا^2 سے ایسے دو متوازی خط تعبیر ہوتے ہیں جو مستوی لا = ۰ میں واقع ہیں اور اِن خطوں میں سے ہر ایک ی۔محور سے فاصلہ ا پر واقع ہے۔ متوازی خطوں کا یہ جوڑا در اصل ایک مخروطی تراش ہے جس کا محور تشاکل ی۔محور ہے۔ اِن متوازی خطوں کو ی۔محور کے گرد گھمانے سے جو گردشی مخروطی نما حاصل ہوتا ہے اس کی مساوات ہے

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$$

یہ گردشی مخروطی نما ایک قائم مستدیر اسطوانہ ہے جس کا محور ی۔محور ہے اور سطح ی = ۰ کے ذریعہ حاصل ہونے والی تراش نصف قطر ا والا ایک دائرہ ہے۔

(۲) مساواتوں لا = ۰، ما^2 = ا^2 ی^2 سے مبداء میں سے گذرنے والے خطوں کا ایک جوڑا تعبیر ہوتا ہے۔ اِن خطوں کو ی۔محور کے گرد گھمانے سے

ایک قائم مستدیر مخروط حاصل ہوتا ہے جس کی مساوات ہے

$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \text{ا}^{۲}\,\text{ی}^{۲}$$

اس مخروط کا راس مبدا، پر ہے اور محور ی۔محور پہ ہے۔

نوٹ۔ غور سے دیکھا جائے کہ یہ مساوات (لا، ما، ی) میں درجۂ دوم کی ہے اور متجانس ہے۔

(۳) اگر دائرہ $\text{لا} = ۰،\ \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} = \text{ا}^{۲}$ کو ی۔محور کے گرد گھمایا جائے تو کرہ $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} = \text{ا}^{۲}$ حاصل ہوتا ہے۔

(۴) ناقص $\text{لا} = ۰،\ \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} + \frac{\text{ی}^{۲}}{\text{ج}^{۲}} = ۱$ کو ی۔محور کے گرد گھمانے سے ایک گردشی ناقص نما حاصل ہوتا ہے جس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} + \frac{\text{ی}^{۲}}{\text{ج}^{۲}} = ۱$$

(۵) مکافی $\text{لا} = ۰،\ \text{ما}^{۲} = ۴\,\text{ا}\,\text{ی}$ کو ی۔محور کے گرد گھمانے سے ایک گردشی مکافی نما حاصل ہوتا ہے جس کی مساوات ہے

$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = ۴\,\text{ا}\,\text{ی}$$

(۶) زائد $\text{لا} = ۰،\ \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} - \frac{\text{ی}^{۲}}{\text{ج}^{۲}} = ۱$ کو ی۔محور کے گرد یا ما۔محور کے گرد گھمانے سے جو گردشی سطحیں حاصل ہوتی ہیں وہ ترتیب وار ایک چادری زائد نما اور دو چادری زائد نما (گردشی) ہیں۔ ان کی مساواتیں ترتیب وار حسب ذیل ہیں:—

$$\frac{لا^2 + ما^2}{ب^2} - \frac{ی^2}{ج^2} = ۱$$

$$\frac{ما^2}{ب^2} - \frac{ی^2 + لا^2}{ج^2} = ۱$$

مشقی سوالات

۱ — ناقص نما $لا^2 + \frac{ما^2}{۴} + \frac{ی^2}{۹} = ۴۹$ کے نقطہ (۲، ۶، ۱۸) پر کے مماسی مستوی کی مساوات معلوم کرو - نیز نقطہ مذکور پر کے عماد کی مساواتیں بھی معلوم کرو -

۲ — اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ مستوی ل لا + م ما + ن ی = ع ناقص نما $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} + \frac{ی^2}{ج^2} = ۱$ کو مس کرے -

۳ — ثابت کرو کہ مستوی سطح ۲ لا - ۱۲ ما + ۹ ی = ۵ درجہ دوم کی سطح $۲ لا^2 - ۶ ما^2 + ۳ ی^2 = ۵$ کو مس کرتی ہے - نیز نقطۂ تماس کے محدد معلوم کرو -

۴ — خطوط مستقیم لا + ۹ ما - ۳ ی = ۰ = ۳ لا - ۲ ما + ۶ ی - ۵ کے خط تقاطع میں سے گذرنے والی اُن مستوی سطحوں کی مساواتیں معلوم کرو جو مخروطی نما $۲ لا^2 - ۶ ما^2 + ۳ ی^2 = ۵$ کو مس کرتی ہیں -

۵ — مستوی سطح ۲ لا + ما + ۲ ی = ۹ کے ذریعۂ کرہ $لا^2 + ما^2 + ی^2 = ۱۶$ کی جو تراش حاصل ہوتی ہے اس کا مرکز معلوم کرو -

۶ — مخروطی نما $ا لا^2 + ب ما^2 + ج ی^2 = ۱$ کے لحاظ سے نقاط

ن۱ (لا۱، ما۱) اور ن۲ (لا۲، ما۲) میں سے گذرنے والے خط کی قطبی مساواتیں حاصل کرو۔

۷۔ ناقص نما $\frac{\text{لا}^2}{9} + \frac{\text{ما}^2}{4} + \text{ی}^2 = 1$ کی وہ مستوی تراش حاصل کرو جس کا مرکز نقطہ $(1, -1, \frac{1}{4})$ پر ہے۔ نیز ناقص نما کے وہ مماسی مستوی معلوم کرو جو اس تراش کے متوازی ہیں۔

۸۔ ناقص نما $\frac{\text{لا}^2}{25} + \frac{\text{ما}^2}{4} + \frac{\text{ی}^2}{9} = 1$ کے اُن وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرو جو خط $\frac{\text{لا}}{5} = \frac{\text{ما}}{2} = \frac{\text{ی}}{-3}$ کے متوازی ہیں۔

۹۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 25$ کی وہ تراش جو مستوی $2\,\text{ما} - 5\,\text{ی} + 1 = 0$ کے ذریعہ حاصل ہوتی ہے ایک ناقص ہے۔ اس ناقص کے محوروں کے طول اور محوروں کی مساواتیں حاصل کرو۔

۱۰۔ مخروطی نما $4\,\text{لا}^2 + 4\,\text{ما}^2 + 8\,\text{ی}^2 - 4\,\text{مای} - 4\,\text{یلا} - 8\,\text{لاما} + 8\,\text{لا} - 8\,\text{ما} + 5 = 0$ کا مرکز معلوم کرو۔

۱۱۔ اس دو چادری زائد نما کی مساوات حاصل کرو جو زائد $\text{ی} = 0$، $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کو قاطع محور کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۲۔ خط مستقیم $\frac{\text{لا}}{\text{ع}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = 1$، $\text{ی} = 0$ کو لا۔محور کے گرد گھمانے سے جو مخروط حاصل ہوتا ہے اس کی مساوات معلوم کرو۔ نیز مخروط کا نیم راسی زاویہ معلوم کرو۔

دسواں باب

کرہ

۱ ـ اگر کرہ کا مرکز ھ $(\text{لا}_1, \text{ما}_1, \text{ی}_1)$ ہو اور نصف قطر ا ہو تو کرہ کی مساوات ہو گی

$$(\text{لا}-\text{لا}_1)^2+(\text{ما}-\text{ما}_1)^2+(\text{ی}-\text{ی}_1)^2=\text{ا}^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

اس سے ظاہر ہے کہ کرہ کی مساوات میں

لا^2 کا سر = ما^2 کا سر = ی^2 کا سر

اور ما ی، ی لا، لا ما کی رقمیں موجود نہیں ہیں۔

اس لیے درجہ دوم کی مساوات

$$\text{ا}\,\text{لا}^2+\text{ا}\,\text{ما}^2+\text{ا}\,\text{ی}^2+2\,\text{ع}\,\text{لا}+2\,\text{و}\,\text{ما}+2\,\text{ھ}\,\text{ی}+\text{د}=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

سے ایک کرہ تعبیر ہوتا ہے۔

اس کرہ کے اجزا معلوم کرنے کے لیے ہم اوپر کی مساوات کو ذیل کی شکل میں لکھتے ہیں۔

$$\left(\text{لا}+\frac{\text{ع}}{\text{ا}}\right)^2+\left(\text{ما}+\frac{\text{و}}{\text{ا}}\right)^2+\left(\text{ی}+\frac{\text{ھ}}{\text{ا}}\right)^2=\frac{\text{ع}^2+\text{و}^2+\text{ھ}^2-\text{ا}\,\text{د}}{\text{ا}^2}$$

اس کا مقابلہ مساوات (۱) سے کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۲) سے ایک کرہ تعبیر ہوتا ہے جس کا مرکز $\left(-\frac{\text{ع}}{\text{ا}}، -\frac{\text{و}}{\text{ا}}، -\frac{\text{ھ}}{\text{ا}}\right)$ پر ہے اور نصف قطر

$$\sqrt{\frac{\text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ھ}^2 - \text{اد}}{\text{ا}^2}}$$ ہے۔

نوٹ۔ کرہ صرف اس صورت میں حقیقی ہوگا جبکہ

$$(\text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ھ}^2 - \text{اد}) \nless ۰$$

مشقی سوالات

۱ ـ اس کرہ کی مساوات حاصل کرو جس کا مرکز نقطہ (۲، −۳، ۴) پر ہے اور جس کا نصف قطر ۵ ہے۔

۲ ـ کرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 - ۲\text{لا} + ۴\text{ما} - ۶\text{ی} - ۱۱ = ۰$ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کرو۔

۳ ـ ثابت کرو کہ نقاط $(\text{لا}_1، \text{ما}_1، \text{ی}_1)$، $(\text{لا}_2، \text{ما}_2، \text{ی}_2)$ کو ملانے والے وقفہ کو قطر مان کر کھینچے ہوئے کرہ کی مساوات حسب ذیل ہے:-

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا} - \text{لا}_2) + (\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما} - \text{ما}_2) + (\text{ی} - \text{ی}_1)(\text{ی} - \text{ی}_2) = ۰$$

۴ ـ اس کرہ کی مساوات حاصل کرو جو نقاط (۰، ۰، ۰)، (۰، ۱، −۱)، (−۱، ۲، ۰) اور (۱، ۲، ۳) میں سے گذرتا ہے۔

۵ ـ نقطہ (ع، ب، جہ) اور دائرہ $\text{ی} = ۰$، $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ میں سے گذرنے والے کرہ کی مساوات حاصل کرو۔

۶ ۔ اس کرہ کی مساوات حاصل کرو جو حوالہ کی سطحوں اور مستوی $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}} = ۱$ سے بننے والے چار سطحی کے راسوں میں سے گذرتا ہے۔

۷ ۔ اس کرہ کی مساوات معلوم کرو جو نقاط $(\text{لا}_1، \text{ما}_1، \text{ی}_1)$، $(\text{لا}_2، \text{ما}_2، \text{ی}_2)$، $(\text{لا}_3، \text{ما}_3، \text{ی}_3)$، $(\text{لا}_4، \text{ما}_4، \text{ی}_4)$ میں سے گذرتا ہے۔

جواب

$$\begin{vmatrix} \text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 & \text{لا} & \text{ما} & \text{ی} & ۱ \\ \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + \text{ی}_1^2 & \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & \text{ی}_1 & ۱ \\ \text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 + \text{ی}_2^2 & \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & \text{ی}_2 & ۱ \\ \text{لا}_3^2 + \text{ما}_3^2 + \text{ی}_3^2 & \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & \text{ی}_3 & ۱ \\ \text{لا}_4^2 + \text{ما}_4^2 + \text{ی}_4^2 & \text{لا}_4 & \text{ما}_4 & \text{ی}_4 & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

۲ ۔ باب (۹)، دفعہ (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ کرہ

$$\text{ا لا}^2 + \text{ا ما}^2 + \text{ا ی}^2 + ۲\,\text{ع لا} + ۲\,\text{و ما} + ۲\,\text{ھ ی} + \text{د} = ۰$$

کے نقطہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1، \text{ی}_1)$ پر کے مماسی مستوی کی مساوات ہے۔

$$\text{ا لا لا}_1 + \text{ا ما ما}_1 + \text{ا ی ی}_1 + \text{ع}(\text{لا} + \text{لا}_1) + \text{و}(\text{ما} + \text{ما}_1) + \text{ھ}(\text{ی} + \text{ی}_1) + \text{د} = ۰$$

نیز آسانی سے یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ کرہ کے کسی نقطہ پر کا عماد کرہ کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

مشقی سوالات

۱ ۔ کرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 = \text{ا}^2$ کے نقطہ (ا جم طہ جب فہ، ا جب طہ جب فہ، ا جم فہ) پر کے مماسی مستوی کی مساوات لکھو۔

۲۔ اس کے لیے شرط معلوم کرو کہ مستوی سطح ل لا + م ما + ن ی = ع
کرہ لا^2 + ما^2 + ی^2 + ۲ ع لا + ۲ و ما + ۲ ﻫ ی + د = ۰ کو مس کرے۔

اشارہ۔ مستوی سطح کرہ کو مس کرتی ہے اگر کرہ کے مرکز سے مستوی سطح کا عمودی فاصلہ کرہ کے نصف قطر کے مساوی ہو۔

۳۔ ثابت کرو کہ ذیل کے دو کرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔

لا^2 + ما^2 + ی^2 = ۱

لا^2 + ما^2 + ی^2 − ۶ لا + ۵ = ۰

۴۔ کرہ لا^2 + ما^2 + ی^2 = ا^2 کے کسی مماسی مستوی کا قطب کرہ لا^2 + ما^2 + ی^2 = ب^2 کے لحاظ سے لیا گیا ہے۔ قطب کے طریق کی مساوات حاصل کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ کرول

لا^2 + ما^2 + ی^2 + ۲ ع$_1$ لا + ۲ و$_1$ ما + ۲ ﻫ$_1$ ی + د$_1$ = ۰

لا^2 + ما^2 + ی^2 + ۲ ع$_2$ لا + ۲ و$_2$ ما + ۲ ﻫ$_2$ ی + د$_2$ = ۰

کے دائرہ تقاطع کے کسی نقطہ پر کے مماسی مستوی علی القوائم ہوتے ہیں

اگر ۲ ع$_1$ ع$_2$ + ۲ و$_1$ و$_2$ + ۲ ﻫ$_1$ ﻫ$_2$ = د$_1$ + د$_2$

نوٹ۔ اس صورت میں کہا جاتا ہے کہ دیے ہوئے دو کرے ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔

۳۔ مماسی خط کا طول —

نقطہ ن$_1$ (لا$_1$، ما$_1$، ی$_1$) سے کرہ لا^2 + ما^2 + ی^2 + ۲ ع لا + ۲ و ما + ۲ ﻫ ی + د = ۰

تک کھنچا ہوا ایک مماسی خط ن۱ت ہو تو

$$(\text{ن}_1\text{ت})^2 = (\text{ن}_1\text{م})^2 - \text{ر}^2$$

جہاں م کرہ کا مرکز ہے اور ر کرہ کا نصف قطر ہے۔

اس لیے

$$(\text{ن}_1\text{ت})^2 = (\text{لا}_1+\text{ع})^2 + (\text{ما}_1+\text{و})^2 + (\text{ی}_1+\text{ط})^2 - (\text{ع}^2 + \text{و}^2 + \text{ط}^2 - \text{د})$$

$$= \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + \text{ی}_1^2 + ۲\text{ع}\text{لا}_1 + ۲\text{و}\text{ما}_1 + ۲\text{ط}\text{ی}_1 + \text{د}$$

یعنی اگر کرہ کی مساوات س = ۰ میں لا^2 کا سر = ۱ تو نقطہ (لا_1، ما_1، ی_1) سے کرہ تک کھنچے ہوئے کسی مماسی خط کا مربع = س_1

نوٹ۔ مقدار $(\text{ن}_1\text{ت})^2$ کرہ س = ۰ کے لحاظ سے نقطہ ن۱ کی **قوت** کہلاتی ہے۔

۴۔ بنیادی مستوی

اگر

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 + ۲\text{ع}_1\text{لا} + ۲\text{و}_1\text{ما} + ۲\text{ط}_1\text{ی} + \text{د}_1 = ۰$$

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 + ۲\text{ع}_2\text{لا} + ۲\text{و}_2\text{ما} + ۲\text{ط}_2\text{ی} + \text{د}_2 = ۰$$

دو دیے ہوئے کرے ہوں تو اس نقطہ ن کا طریق معلوم کرو جس کی قوتیں دیے ہوئے دو کروں کے لحاظ سے مساوی ہیں۔

اگر ن کا ایک مقام (لا_1، ما_1، ی_1) ہو تو دی ہوئی شرط کے بموجب

$$\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + \text{ی}_1^2 + ۲\,\text{ع}_1\,\text{لا}_1 + ۲\,\text{و}_1\,\text{ما}_1 + ۲\,\text{ہ}_1\,\text{ی}_1 + \text{د}_1$$

$$= \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + \text{ی}_1^2 + ۲\,\text{ع}_2\,\text{لا}_1 + ۲\,\text{و}_2\,\text{ما}_1 + ۲\,\text{ہ}_2\,\text{ی}_1 + \text{د}_2$$

یعنی $۲\,\text{لا}_1(\text{ع}_1 - \text{ع}_2) + ۲\,\text{ما}_1(\text{و}_1 - \text{و}_2) + ۲\,\text{ی}_1(\text{ہ}_1 - \text{ہ}_2) + (\text{د}_1 - \text{د}_2) = ۰$

اس لیے ن کے طریق کی مساوات ہوگی

$$۲\,\text{لا}(\text{ع}_1 - \text{ع}_2) + ۲\,\text{ما}(\text{و}_1 - \text{و}_2) + ۲\,\text{ی}(\text{ہ}_1 - \text{ہ}_2) + (\text{د}_1 - \text{د}_2) = ۰$$

یہ مساوات درجہ اول کی ہے۔ اس لیے ایک مستوی کو تعبیر کرتی ہے جو دیے ہوئے دو کروں کا **بنیادی مستوی** کہلاتا ہے۔

نوٹ۔ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دو دیے ہوئے کروں کا بنیادی مستوی اِن کروں کے مشترک نقطوں میں سے گذرتا ہے اور کروں کے مرکزوں کے خط پر عمود وار ہے۔

۵۔ دو کروں کی مساواتیں سادہ ترین شکل میں—

فرض کرو کہ کروں کے مرکزوں کے خط کو لا۔محور اور کروں کے بنیادی مستوی کو سطح مستوی لا = ۰ مانا گیا ہے۔

چونکہ کروں کے مرکز لا۔محور پر ہیں، اس لیے کروں کی مساواتیں حسب ذیل شکل کی ہونگی۔

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 + ۲\,\text{ع}_1\,\text{لا} + \text{د}_1 = ۰$$

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 + ۲\,\text{ع}_2\,\text{لا} + \text{د}_2 = ۰$$

اِن دو کروں کا بنیادی مستوی ہے

$$2\,\text{لا}\,(\text{ع}_1-\text{ع}_2)+(\text{د}_1-\text{د}_2)=0$$

لیکن بموجب مفروض بنیادی مستوی ہے

$$\text{لا}=0$$

اس لیے ضروری ہے کہ $(\text{د}_1-\text{د}_2)=0$ یعنی $\text{د}_1=\text{د}_2=\text{د}$، فرض کرو۔
تب کروں کی مساواتیں حسب ذیل شکل کی ہونگی

$$\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2+2\,\text{ع}_1\,\text{لا}+\text{د}=0$$
$$\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2+2\,\text{ع}_2\,\text{لا}+\text{د}=0$$

نوٹ۔ اگر مساوات $\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2+2\,\text{ع}\,\text{لا}+\text{د}=0$ میں د کو برقرار رکھ کر ع کو مختلف قیمتیں دی جائیں تو کروں کا ایک ایسا نظام حاصل ہوتا ہے کہ ان کروں میں کسی دو کا بنیادی مستوی، مستوی لا = ۰ ہے۔
کروں کا ایسا نظام "ہم محور کروں کا نظام" کہلاتا ہے۔

مشقی سوالات

۱ ۔ اگر تین کرے دیے جائیں جن کے مرکز ہم خط نہیں ہیں تو ثابت کرو کہ ان کروں میں سے دو دو کے تین بنیادی مستوی ایک ہی خط مستقیم میں سے گذرتے ہیں۔

۲ ۔ اگر چار کرے دیے جائیں جن میں سے کسی تین کے مرکز ہم خط نہیں ہیں اور چاروں مرکز ہم مستوی نہیں ہیں تو ثابت کرو کہ ان چار کروں سے دو دو کے جو چھ بنیادی مستوی حاصل ہوتے ہیں وہ ایک نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

نوٹ۔ یہ نقطہ دیے ہوئے چار کروں کا **بنیادی مرکز** کہلاتا ہے۔ اگر بنیادی مرکز سے اِن کروں میں سے کسی ایک تک کھینچے ہوئے مماس کا طول ک ہو تو وہ کرہ جس کا مرکز بنیادی مرکز پر ہے اور جس کا نصف قطر ک ہے، دیے ہوئے چار کروں میں سے ہر ایک کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

۳ ــ ثابت کرو کہ ہم محور نظام $لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} + ۲ع لا + د = ۰$ کے کوئی دو کرے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، مس کرتے ہیں یا قطع نہیں کرتے بموجب اس کے کہ

$$د \;\substack{>\\=\\<}\; ۰$$

۴ ــ کروں کے ہم محور نظام $لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} + ۲ع لا + د = ۰$ کے نقطہ کروں کے مرکز معلوم کرو۔

۵ ــ اس کرہ کی مساوات معلوم کرو جو دائرہ $لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} + ۲لا = ۴$ ؛ $لا - ۲ما + ۳ی = ۰$ میں سے گذرتا ہے اور نقطہ (۶، ۳، ۲) میں سے بھی گذرتا ہے۔

گیارھواں باب

دوسرے درجہ کی سطحوں کی معیاری مساواتیں

(ا) مرکز دار مخروطی نما

ا۔ مساوات $\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{ما}^2 + \text{ج}\,\text{ی}^2 = 1$ سے تعبیر ہونے والا مخروطی نما مرکز دار مخروطی نما ہے جس کا مرکز مبداء پر ہے کیونکہ مبداء میں سے گذرنے والے ہر وتر کا وسطی نقطہ مبداء پر ہے۔

نویں باب کے نتیجوں کی مدد سے مخروطی نما $\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{ما}^2 + \text{ج}\,\text{ی}^2 = 1$ کے لیے ہم حسب ذیل نتیجے فوراً حاصل کر سکتے ہیں:-

(۱) نقطہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1، \text{ی}_1)$ پر کے مماسی مستوی کی مساوات ہے

$$\text{ا}\,\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{ما}\,\text{ما}_1 + \text{ج}\,\text{ی}\,\text{ی}_1 = 1$$

(۲) مستوی $\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} + \text{ن}\,\text{ی} = \text{ع}$ مخروطی نما کو مس کرے گا اگر

$$\frac{\text{ل}^2}{\text{ا}} + \frac{\text{م}^2}{\text{ب}} + \frac{\text{ن}^2}{\text{ج}} = \text{ع}^2$$

(۳) (لا۱، ما۱، ی۱) کے قطبی مستوی کی مساوات ہے

ا۱ لا لا۱ + ب۱ ما ما۱ + ج۱ ی ی۱ = ۱

(۴) مخروطی نما کے ایسے تمام وتر جن کی تنصیف نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر ہوتی ہے مستوی ا۱ لا لا۱ + ب۱ ما ما۱ + ج۱ ی ی۱ - ۱ = ا۱ لا۱۲ + ب۱ ما۱۲ + ج۱ ی۱۲ - ۱ پر واقع ہیں یعنی اس مستوی سے مخروطی نما کی وہ تراشش حاصل ہوتی ہے جس کا مرکز نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر ہے۔

(۵) اُن وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق جن میں سے ہر ایک خط لا/ل = ما/م = ی/ن کے متوازی ہے مستوی ا۱ ل لا + ب۱ م ما + ج۱ ن ی = ۰ ہے۔ یعنی یہ مستوی متوازی وتروں کے دیے ہوئے نظام کے ہر رکن کی تنصیف کرتا ہے۔ یہ مستوی خط لا/ل = ما/م = ی/ن کا قطری مستوی کہلاتا ہے۔

(۶) مخروطی نما کے نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر کے عماد کی مساواتیں ہیں۔

(لا - لا۱)/(ا۱ لا۱) = (ما - ما۱)/(ب۱ ما۱) = (ی - ی۱)/(ج۱ ی۱)

۲۔ اگر مساوات ا۱ لا۲ + ب۱ ما۲ + ج۱ ی۲ = ۱ میں ا۱، ب۱، ج۱ تینوں مثبت ہوں تو ہم لکھ سکتے ہیں ا۱ = ۱/ا۲، ب۱ = ۱/ب۲، ج۱ = ۱/ج۲

اس صورت میں مساوات ہو جاتی ہے

لا۲/ا۲ + ما۲/ب۲ + ی۲/ج۲ = ۱

اس مساوات سے تعبیر ہونے والا مخروطی نما ناقص نما کہلاتا ہے۔
ناقص نما کی ہر متوی تراشش ایک ناقص ہے۔

اگر ا_1 اور ب_1 دونوں مثبت ہوں اور ج_1 منفی ہو تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ا}_1 = \frac{1}{\text{ا}^2} \;;\; \text{ب}_1 = \frac{1}{\text{ب}^2} \;;\; \text{ج}_1 = -\frac{1}{\text{ج}^2}$$

اس صورت میں مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = 1$$

اس مساوات سے تعبیر ہونے والا مخروطی نما یک چادری زائد نما کہلاتا ہے۔

یک چادری زائد نما کی ہر متوی تراشش جو متوی $\text{ی} = \text{ی}_1$ کے ذریعہ لی جائے ایک ناقص ہے اور ہر متوی تراشش جو متوی $\text{لا} = \text{لا}_1$ یا متوی $\text{ما} = \text{ما}_1$ کے ذریعہ لی جائے ایک زائد ہے۔

ی۔ محور اس یک چادری زائد نما کو خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔
اسی طرح مساواتوں

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = 1 \quad \text{اور} \quad -\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = 1$$

سے بھی یک چادری زائد نما تعبیر ہوتے ہیں۔

اگر ا_1 اور ب_1 دونوں منفی ہوں اور ج_1 مثبت ہو تو ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{ا}_1 = -\frac{1}{\text{ا}^2} \;;\; \text{ب}_1 = -\frac{1}{\text{ب}^2} \;;\; \text{ج}_1 = \frac{1}{\text{ج}^2}$$

اس صورت میں مساوات ہو جاتی ہے

$$-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = 1$$

اس مساوات سے تعبیر ہونے والا مخروطی نما دو چادری زائد نما کہلاتا ہے۔

اس دو چادری زائد نما کو مستوی ی = ۰ حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کرتا۔

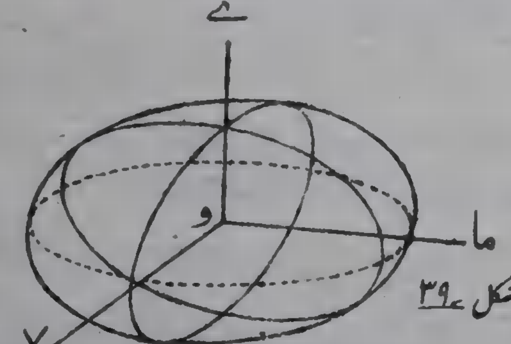
اگر $\text{ی}_1^2 > \text{ج}^2$ تو مستوی ی = ج اور مندرجۂ بالا دو چادری زائد نما کا منحنی تقاطع ایک ناقص ہوتا ہے۔

نیز ہر مستوی تراش جو لا = لا₁ یا ما = ما₁ کے ذریعہ لی جائے ایک زائد ہے۔

اسی طرح مساواتوں ۔ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = ۱$ اور $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = ۱$

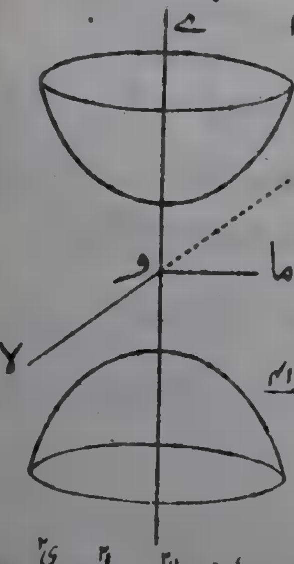
سے بھی دو چادری زائد نما تعبیر ہوتے ہیں۔

ناقص نما، ایک چادری زائد نما اور دو چادری زائد نما کے خاکے ذیل میں دیئے گئے ہیں:-



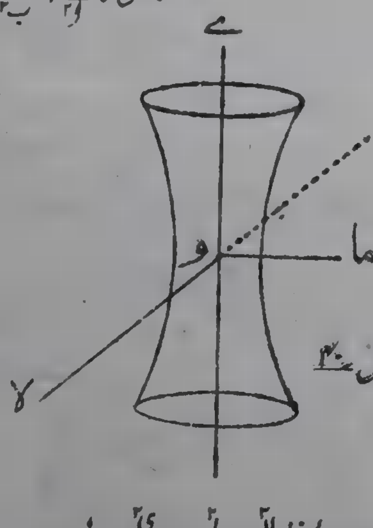
شکل ۳۹

ناقص نما $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = ۱$



شکل ۴۱

دو چادری زائد نما ۔ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = ۱$



شکل ۴۰

یک چادری زائد نما $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = ۱$

نوٹ۔ اگر ا = ب تو مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2}=1$ سے
ایسا گردشی ناقص نما تعبیر ہوتا ہے جس کا محور گردش ی۔ محور ہے۔

اگر ا = ب تو مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}-\frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2}=1$ سے
ایسا گردشی یک چادری زائد نما تعبیر ہوتا ہے جس کا محور گردش ی۔ محور ہے۔

اگر ا = ب تو مساوات $-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}-\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2}=1$ سے
ایسا گردشی دو چادری زائد نما تعبیر ہوتا ہے جس کا محور گردش ی۔ محور ہے۔

۳۔ مرتب کرہ —

ہمیں معلوم ہے کہ مستوی سطح $\text{ل لا}+\text{م ما}+\text{ن ی}=\sqrt{\frac{\text{ل}^2}{\text{ا}}+\frac{\text{م}^2}{\text{ب}}+\frac{\text{ن}^2}{\text{ج}}}$
مرکزدار مخروطی نما $\text{ا لا}^2+\text{ب ما}^2+\text{ج ی}^2=1$ کو مس کرتی ہے۔

فرض کرو کہ مرکزدار مخروطی نما $\text{ا لا}^2+\text{ب ما}^2+\text{ج ی}^2=1$ کے حسب ذیل تین مماسی مستویاں باہم علی القوائم ہیں:—

$$\text{ل}_1\text{لا}+\text{م}_1\text{ما}+\text{ن}_1\text{ی}=\sqrt{\frac{\text{ل}_1^2}{\text{ا}}+\frac{\text{م}_1^2}{\text{ب}}+\frac{\text{ن}_1^2}{\text{ج}}}$$

$$\text{ل}_2\text{لا}+\text{م}_2\text{ما}+\text{ن}_2\text{ی}=\sqrt{\frac{\text{ل}_2^2}{\text{ا}}+\frac{\text{م}_2^2}{\text{ب}}+\frac{\text{ن}_2^2}{\text{ج}}}$$

$$\text{ل}_3\text{لا}+\text{م}_3\text{ما}+\text{ن}_3\text{ی}=\sqrt{\frac{\text{ل}_3^2}{\text{ا}}+\frac{\text{م}_3^2}{\text{ب}}+\frac{\text{ن}_3^2}{\text{ج}}}$$

ان مساواتوں میں $(\text{ل}_1،\text{م}_1،\text{ن}_1)$، $(\text{ل}_2،\text{م}_2،\text{ن}_2)$، $(\text{ل}_3،\text{م}_3،\text{ن}_3)$ ان مماسی

مستویوں کے عمادوں کی سمتی جیوب التمام ہیں۔
اِن مساواتوں کے مربعوں کا مجموعہ لینے سے حاصل ہوتا ہے

$$لا^{۲} + ما^{۲} + ی^{۲} = \frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ب} + \frac{۱}{ج}$$

مندرجۂ بالا رشتہ مرکز دار مخروطی نما کے تین باہم علی القوائم مماسی مستویوں کے نقطۂ تقاطع پر درست ہے یعنی مندرجۂ بالا مساوات سے تین باہم علی القوائم مماسی مستویوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق حاصل ہوتا ہے۔ یہ طریق ایک کرہ ہے جو دیے ہوئے مرکز دار مخروطی نما کا **مرتب کرہ** کہلاتا ہے۔

نوٹ ۔ مرتب کرہ صرف اس صورت میں حقیقی ہوتا ہے جب کہ

$$\frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ب} + \frac{۱}{ج} > صفر$$

۴۔ مزدوج قطر —

فرض کرو کہ ن (لا، ما، ی) ناقص نما $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} + \frac{ی^{۲}}{ج^{۲}} = ۱$ پر کا ایک نقطہ ہے۔

اگر مبدا، و ہو تو ناقص نما کے قطر و ن کی سمتی جیوب التمام (لا، ما، ی) کے متناسب ہوں گی اس لیے قطر و ن کے قطری مستوی کی مساوات ہوگی

$$\frac{لا\,لا_{۱}}{ا^{۲}} + \frac{ما\,ما_{۱}}{ب^{۲}} + \frac{ی\,ی_{۱}}{ج^{۲}} = صفر$$

فرض کرو کہ یہ قطری مستوی ناقص نما کے نقطۂ ق (لا۲، ما۲، ی۲) میں سے گذرتا ہے۔

تب $\frac{لا_{۱}لا_{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما_{۱}ما_{۲}}{ب^{۲}} + \frac{ی_{۱}ی_{۲}}{ج^{۲}} = صفر$

اس رشتہ سے ظاہر ہے کہ اگر و ن کا قطری مستوی و ق میں سے —

گذرے تو وق کا قطری مستوی ون میں سے گذرے گا۔

فرض کرو کہ ون اور وق کے قطری مستویوں کا خط تقاطع و ر۳ ہے

جہاں ر۳ (لا_3، ما_3، ی_3) ناقص نما پر کا نقطہ ہے۔

تب $\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ی}_1^2}{\text{ج}^2}=1$ ؛ $\frac{\text{لا}_2^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}_2^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ی}_2^2}{\text{ج}^2}=1$ ؛ $\frac{\text{لا}_3^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}_3^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ی}_3^2}{\text{ج}^2}=1$

اور $\frac{\text{لا}_1\text{لا}_2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}_1\text{ما}_2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ی}_1\text{ی}_2}{\text{ج}^2}=\frac{\text{لا}_2\text{لا}_3}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}_2\text{ما}_3}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ی}_2\text{ی}_3}{\text{ج}^2}$

$=\frac{\text{لا}_3\text{لا}_1}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}_3\text{ما}_1}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ی}_3\text{ی}_1}{\text{ج}^2}=$ صفر

مندرجۂ بالا رشتوں سے ظاہر ہے کہ

$$\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}},\ \frac{\text{ما}_1}{\text{ب}},\ \frac{\text{ی}_1}{\text{ج}}\ ;\ \frac{\text{لا}_2}{\text{ا}},\ \frac{\text{ما}_2}{\text{ب}},\ \frac{\text{ی}_2}{\text{ج}}\ ;\ \frac{\text{لا}_3}{\text{ا}},\ \frac{\text{ما}_3}{\text{ب}},\ \frac{\text{ی}_3}{\text{ج}}$$

سمتی جیوب التمام ہیں تین باہم علی القوائم خطوں کے۔

اس لیے

$$\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}},\ \frac{\text{لا}_2}{\text{ا}},\ \frac{\text{لا}_3}{\text{ا}}\ ;\ \frac{\text{ما}_1}{\text{ب}},\ \frac{\text{ما}_2}{\text{ب}},\ \frac{\text{ما}_3}{\text{ب}}\ ;\ \frac{\text{ی}_1}{\text{ج}},\ \frac{\text{ی}_2}{\text{ج}},\ \frac{\text{ی}_3}{\text{ج}}$$

سمتی جیوب التمام ہیں تین باہم علی القوائم خطوں کے۔

اس لیے

$$\text{لا}_1^2+\text{لا}_2^2+\text{لا}_3^2=\text{ا}^2\ ;\ \text{ما}_1^2+\text{ما}_2^2+\text{ما}_3^2=\text{ب}^2\ ;\ \text{ی}_1^2+\text{ی}_2^2+\text{ی}_3^2=\text{ج}^2$$

اور $\text{ما}_1\text{ی}_1+\text{ما}_2\text{ی}_2+\text{ما}_3\text{ی}_3=0$ ؛ $\text{ی}_1\text{لا}_1+\text{ی}_2\text{لا}_2+\text{ی}_3\text{لا}_3=0$ ؛ $\text{لا}_1\text{ما}_1+\text{لا}_2\text{ما}_2+\text{لا}_3\text{ما}_3=0$

نیز $\begin{vmatrix}\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}} & \frac{\text{ما}_1}{\text{ب}} & \frac{\text{ی}_1}{\text{ج}}\\ \frac{\text{لا}_2}{\text{ا}} & \frac{\text{ما}_2}{\text{ب}} & \frac{\text{ی}_2}{\text{ج}}\\ \frac{\text{لا}_3}{\text{ا}} & \frac{\text{ما}_3}{\text{ب}} & \frac{\text{ی}_3}{\text{ج}}\end{vmatrix}=1$ یعنی $\begin{vmatrix}\text{لا}_1 & \text{ما}_1 & \text{ی}_1\\ \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & \text{ی}_2\\ \text{لا}_3 & \text{ما}_3 & \text{ی}_3\end{vmatrix}=\text{ا ب ج}$ (۱)

اَب ون^2 + وق^2 + ور^2 = لا$_1^2$ + ما$_1^2$ + ی$_1^2$ + لا$_2^2$ + ما$_2^2$ + ی$_2^2$ + لا$_3^2$ + ما$_3^2$ + ی$_3^2$

= (لا$_1^2$ + لا$_2^2$ + لا$_3^2$) + (ما$_1^2$ + ما$_2^2$ + ما$_3^2$) + (ی$_1^2$ + ی$_2^2$ + ی$_3^2$)

= ا^2 + ب^2 + ج^2 .... (ب)

چونکہ ون، وق کے قطری مستوی ور میں سے گذرتے ہیں، اس لیے ور کا قطری مستوی ون، وق میں سے گذرے گا۔ یعنی ناقص نما کے قطر ون، وق، ور ایسے ہیں کہ اِن میں سے ہر ایک کا قطری مستوی بقیہ دو قطروں میں سے گذرنیوالا مستوی ہے۔ اس خاصیت کی بناء پر ون، وق، ور ناقص نما کے **مزدوج قطر** کہلاتے ہیں۔

اوپر کے نتائج (ا) اور (ب) سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ون، وق، ور ناقص نما کے کوئی تین مزدوج قطر ہوں تو (۱) چار سطحی (و ن ق ر) کا حجم مستقل ہے اور $\frac{1}{6}$ اب ج کے مساوی ہے اور (۲) (ون^2 + وق^2 + ور^2) مستقل ہے اور (ا^2 + ب^2 + ج^2) کے مساوی ہے۔

(ب) مکافی نما

۵۔ مساوات ۲ ج ی = ا$_1$ لا^2 + ب$_1$ ما^2 سے تعبیر ہونے والا مخروطی نما **مکافی نما** کہلاتا ہے۔ اس مکافی نما کی ہر تراش جو مستوی لا = لا$_1$ یا ما = ما$_1$ کے ذریعہ لی جائے ایک مکافی ہے۔

اگر ا$_1$ اور ب$_1$ کی ایک ہی علامت ہو تو مکافی نما **ناقصی مکافی نما** کہلاتا ہے۔ اس صورت میں مکافی نما کی ہر تراش جو سطح ی = ی$_1$ کے ذریعہ لی جائے ایک ناقص ہے۔ یہ ناقص صرف اس صورت میں حقیقی ہوتا ہے جبکہ ج ی$_1$ مثبت ہے۔

اگر ا، اور ب، کی علامتیں مختلف ہوں تو مکافی نما زائدی مکافی نما کہلاتا ہے۔ اس صورت میں مکافی نما کی ہر تراش جو سطح ی = ی، کے ذریعہ لی جائے ایک زائد ہے اور ی کی ہر قیمت کے لیے یہ زائد حقیقی ہوتا ہے۔ مستوی ی = ی، اس زائدی مکافی نما کو خطوط ی = ۰ ؛ ا،لا^2 + ب، ما^2 = ۰ پر قطع کرتا ہے۔ متقاطع خطوط کا یہ جوڑا در اصل زائد کی بگڑی ہوئی شکل (degenerate form) ہے۔

مستویوں ی = ی، اور ی = ـــ ی، کے ذریعہ زائدی مکافی نما کی جو تراشیں حاصل ہوتی ہیں ان کے ظل سطح ی = ۰ پر مزدوج زائد ہوتے ہیں۔

اگر ا، اور ب، دونوں مثبت ہوں تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$ا_1 = \frac{1}{ا^2} \text{ ؛ } ب_1 = \frac{1}{ب^2} \quad \text{اور } ج_1 = \frac{1}{ج}$$

اس صورت میں ناقصی مکافی نما کی مساوات ہوجاتی ہے

$$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = \frac{2ی}{ج}$$

نوٹ۔ اگر ا^2 = ب^2 تو ناقصی مکافی نما ایک گردشی مکافی نما ہے جس کا محور گردش ی۔ محور ہے۔

اگر ا، مثبت اور ب، منفی ہو تو ہم لکھ سکتے ہیں

$$ا_1 = \frac{1}{ا^2} \text{ ؛ } ب_1 = -\frac{1}{ب^2} \quad \text{اور } ج_1 = \frac{1}{ج}$$

اس صورت میں زائدی مکافی نما کی مساوات ہوجاتی ہے

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = \frac{2ی}{ج}$$

۶ ـــ نویں باب کے نتیجوں کی مدد سے مکافی نما کے لیے

(۱) نقطہ (لا، ما، ی،) پر کے مماسی مستوی کی مساوات

(۲) اس کے لیے شرط کہ ایک دیا ہوا مستوی مکانی نما کو مس کرے

(۳) نقطہ (لا، ما، ی) کے قطبی مستوی کی مساوات

(۴) نقطہ (لا، ما، ی) پر کے عماد کی مساواتیں

اور (۵) اُن وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق جن میں سے ہر ایک خط

$\frac{لا}{ل} = \frac{ما}{م} = \frac{ی}{ن}$ کے متوازی ہے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ یہ تمام نتیجے طالب علم مشق کے طور پر حاصل کرے۔

۷۔ راس۔ محور

مکانی نما ا لا^2 + ب ما^2 = ۲ ج ی کی ہر تراشش جو مستوی ی = ی$_1$ کے ذریعہ لی جائے ایک ہم مرکز دار مخروطی ہے جس کا مرکز ی۔محور پر واقع ہے۔ نیز مستوی ی = ۰ مبداء پر کا مماسی مستوی ہے۔ اس مماسی مستوی کے نقطہ تماس (۰، ۰، ۰) میں سے گذرنے والا عماد اُن مستوی تراشوں کے مرکزوں کا طریق ہے جو مماسی مستوی کے متوازی لی گئی ہیں۔ اس صورت میں مبداء (۰، ۰، ۰) مکانی نما کا **راس** کہلاتا ہے اور راس پر کا عماد (یعنی ی۔محور) مکانی نما کا **محور** کہلاتا ہے۔

آسانی سے یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ و لا کے متوازی کھینچے ہوئے وتروں کے وسطی نقطے مستوی ما و ی پر واقع ہیں اور و ما کے متوازی کھینچے ہوئے وتروں کے وسطی نقطے مستوی ی و لا پر واقع ہیں۔

۸۔ قطری مستوی

باب (۹) دفعہ (۷) سے حاصل ہوتا ہے کہ مکانی نما ۲ ی = ا لا^2 + ب ما^2 کے اُن وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق جو خط $\frac{لا}{ل} = \frac{ما}{م} = \frac{ی}{ن}$ کے متوازی ہے

مستوی $\text{ا}\,\text{ل}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{م}\,\text{ما} = \text{ن}$ ہے۔ یہ مستوی ی ا۔ محور کے متوازی ہے یعنی مکافی نما کے محور کے متوازی ہے۔ متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق قطری مستوی کہلاتا ہے۔ اس لیے مکافی نما کی صورت میں ہر قطری مستوی مکافی نما کے محور کے متوازی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ راس (۰، ۰، ۰) میں سے گذرنے والے دو خط و ن، و ق ہیں جن کی مساواتیں ترتیب وار حسب ذیل ہیں:—

$$\frac{\text{لا}}{\text{ل}_1} = \frac{\text{ما}}{\text{م}_1} = \frac{\text{ی}}{\text{ن}_1} \;;\; \frac{\text{لا}}{\text{ل}_2} = \frac{\text{ما}}{\text{م}_2} = \frac{\text{ی}}{\text{ن}_2}$$

تب و ن کے قطری مستوی کی مساوات ہوگی $\text{ا}\,\text{ل}_1\text{لا} + \text{ب}\,\text{م}_1\text{ما} = \text{ن}_1$

اگر خط و ق، خط و ن کے قطری مستوی کے متوازی ہے تو $\text{ا}\,\text{ل}_1\text{ل}_2 + \text{ب}\,\text{م}_1\text{م}_2 = $ صفر
اس رشتہ سے ظاہر ہے کہ و ق کا قطری مستوی و ن کے متوازی ہوگا۔ اس صورت میں و ن، و ق کے قطری مستوی مکافی نما کے **مزدوج قطری مستوی** کہلاتے ہیں۔

فرض کرو کہ مستوی سطح $\text{ی} = \text{ی}_1$ کے ذریعہ مکافی نما $\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{ما}^2 = 2\,\text{ی}$ کی تراشش لی گئی ہے۔

خطوط $\frac{\text{لا}}{\text{ل}_1} = \frac{\text{ما}}{\text{م}_1} = \frac{\text{ی}}{\text{ن}_1} \;;\; \frac{\text{لا}}{\text{ل}_2} = \frac{\text{ما}}{\text{م}_2} = \frac{\text{ی}}{\text{ن}_2}$ کے قطری مستوی، مستوی $\text{ی} = \text{ی}_1$ سے

خطوط $\text{ی} = \text{ی}_1$، $\text{ا}\,\text{ل}_1\text{لا} + \text{ب}\,\text{م}_1\text{ما} = \text{ن}_1$ اور $\text{ی} = \text{ی}_1$، $\text{ا}\,\text{ل}_2\text{لا} + \text{ب}\,\text{م}_2\text{ما} = \text{ن}_2$ پر ملتے ہیں۔

تراشش کے مرکز میں سے مذکورۂ بالا خطوں کے متوازی کھینچے ہوئے خطوں کی مساواتیں ہوں گی۔

ی = ی۱، ا ل۱ لا + ب م۱ ما = ۰ اور ی = ی۱، ا ل۲ لا + ب م۲ ما = ۰

یہ خطوط تراش کے مرکز دار مخروطی کے مزدوج قطر ہوں گے

اگر ا ل۱ ل۲ + ب م۱ م۲ = ۰

یعنی اگر خطوط لا/ل۱ = ما/م۱ = ی/ن۱ اور لا/ل۲ = ما/م۲ = ی/ن۲ کے قطری مستوی، مزدوج قطری مستوی ہوں۔

پس معلوم ہوا کہ ی = ی۱ اور مکافی نما کے مزدوج قطری مستویوں کے خطوط تقاطع مکافی نما کی اس مستوی تراش کے مزدوج قطروں کے متوازی ہیں جو ی = ی۱ کے ذریعہ لی جائے۔

(ج) مخروط

۹۔ شکل ا لا² + ب ما² + ج ی² = ۰ کی مساوات درجہ دوم کے ایک مخروط کو تعبیر کرتی ہے جس کا راس مبدا پر ہے کیوں کہ اگر ن۱ (لا۱، ما۱، ی۱) اس سطح پر واقع ہے تو مبدا و کو ن۱ سے ملانے والے خط کے تمام نقطے اس مساوات کو پورا کرتے ہیں یعنی خط و ن۱ پورا پورا مخروط پر واقع ہے۔ خط و ن۱ مخروط کا ایک مکوّن ہے۔

ذیل کے نتیجے آسانی سے حاصل کیے جا سکتے ہیں:—

(۱) مخروط ا لا² + ب ما² + ج ی² = ۰ کے کسی نقطہ ن۱ (لا۱، ما۱، ی۱) پر کے مماسی مستوی کی مساوات ہے ا لا لا۱ + ب ما ما۱ + ج ی ی۱ = ۰

یہ مماسی مستوی مخروط کو خط و ن۱ کے ہر نقطہ پر مس کرتا ہے یعنی مخروط کا ہر مماسی مستوی مخروط کو ایک مکوّن کے ہر نقطہ پر مس کرتا ہے۔

(۲) مستوی سطح ل لا + م ما + ن ی = ۰ مخروط ا لا^۲ + ب ما^۲ + ج ی^۲ = ۰ کو مس کرے گی

اگر $\frac{ل^۲}{ا} + \frac{م^۲}{ب} + \frac{ن^۲}{ج} = ۰$

(۳) نقطہ (لا$_۱$، ما$_۱$، ی$_۱$) کے قطبی مستوی کی مساوات ہے

ا لا لا$_۱$ + ب ما ما$_۱$ + ج ی ی$_۱$ = ۰

(۴) مخروط کی وہ تراشش جس کا مرکز نقطہ (لا$_۱$، ما$_۱$، ی$_۱$) ہو حسب ذیل ہے:-

ا لا لا$_۱$ + ب ما ما$_۱$ + ج ی ی$_۱$ = ا لا$_۱^۲$ + ب ما$_۱^۲$ + ج ی$_۱^۲$

(۵) خط $\frac{لا}{ل} = \frac{ما}{م} = \frac{ی}{ن}$ کے قطری مستوی کی مساوات ہے

ا ل لا + ب م ما + ج ن ی = ۰

مشقی سوالات

۱۔ نقطہ ن$_۱$ (لا$_۱$، ما$_۱$، ی$_۱$) سے ناقص نما $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} + \frac{ی^۲}{ج^۲} = ۱$ تک کھینچے ہوئے مماسی خطوط سے بننے والی سطح (یعنی مخروط) کی مساوات حاصل کرو۔

۲۔ ناقص نما $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} + \frac{ی^۲}{ج^۲} = ۱$ کے ان مماسوں کا طریق معلوم کرو جن میں سے ہر ایک خط مستقیم $\frac{لا}{ل} = \frac{ما}{م} = \frac{ی}{ن}$ کے متوازی ہے۔

۳۔ مرکزدار مخروطی نما ا لا^۲ + ب ما^۲ + ج ی^۲ = ۱ کے ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرو جو ایک دیئے ہوئے نقطہ (ع، ب، ج) میں سے گذرتے ہیں۔

۴۔ مستوی سطح ل لا + م ما + ن ی = ۱ اور مخروطی نما ا لا^۲ + ب ما^۲ + ج ی^۲ = ۱

کے نقاط تقاطع کو مبدا سے ملانے سے جو مخروط حاصل ہوتا ہے اس کی مساوات معلوم کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ کسی دیے ہوئے نقطہ (عہ، بہ، جہ) میں سے ناقص نما $\frac{لا^2}{ا^2}+\frac{ما^2}{ب^2}+\frac{ی^2}{ج^2}=1$ کے چھ عاد کھینچے جا سکتے ہیں۔

۶۔ ثابت کرو کہ کسی دیے ہوئے نقطہ (عہ، بہ، جہ) میں سے مکافی نما $2ی = ا\,لا^2 + ب\,ما^2$ کے پانچ عاد کھینچے جا سکتے ہیں۔

۷۔ اگر ن $(لا_1، ما_1، ی_1)$، ق $(لا_2، ما_2، ی_2)$، ر $(لا_3، ما_3، ی_3)$ ناقص نما $\frac{لا^2}{ا^2}+\frac{ما^2}{ب^2}+\frac{ی^2}{ج^2}=1$ کے مزدوج قطروں کے سرے ہوں تو ثابت کرو کہ مستوی ن ق ر کی مساوات حسب ذیل ہے:-

$$\frac{لا}{ا^2}(لا_1+لا_2+لا_3)+\frac{ما}{ب^2}(ما_1+ما_2+ما_3)+\frac{ی}{ج^2}(ی_1+ی_2+ی_3)=1$$

نیز ثابت کرو کہ مستوی ن ق ر ناقص نما $\frac{لا^2}{ا^2}+\frac{ما^2}{ب^2}+\frac{ی^2}{ج^2}=\frac{1}{3}$ کو مس کرتا ہے اور نقطہ تماس △ ن ق ر کا ہندسی مرکز ہے۔

۸۔ اگر و ن، و ق، و ر ناقص نما $\frac{لا^2}{ا^2}+\frac{ما^2}{ب^2}+\frac{ی^2}{ج^2}=1$ کے مزدوج قطر ہوں تو ثابت کرو کہ مستوی ن ق ر کے قطب کا طریق $\frac{لا^2}{ا^2}+\frac{ما^2}{ب^2}+\frac{ی^2}{ج^2}=3$ ہے۔

۹۔ ناقص نما $\frac{لا^2}{ا^2}+\frac{ما^2}{ب^2}+\frac{ی^2}{ج^2}=1$ کی اس تراش کا رقبہ معلوم کرو جو مستوی $ل\,لا+م\,ما+ن\,ی=0$ کے ذریعہ لی جائے۔

۱۰۔ مکافی نما $2ی=5\,لا^2+6\,ما^2$ کے اس وتر کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۴، ۵) میں سے گذرتا ہے اور جس کا وسطی نقطہ مستوی $2\,لا+4\,ما=1$ پر واقع ہے۔

(د) مرکزی تراشیں

۱۰ — فرض کرو کہ مرکز دار مخروطی نما $\text{ا لا}^{2} + \text{ب ما}^{2} + \text{ج ی}^{2} = 1$ کی تراش مرکز میں سے گذرنے والے مستوی $\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی} = 0$ کے ذریعہ لی گئی ہے - یہ تراش ایک مرکز دار مخروطی ہوگی - ہم اس تراش کے نصف محوروں کے طول اور محوروں کی ساوائیں معلوم کرنا چاہتے ہیں -

ظاہر ہے کہ تراش کا مرکز مخروطی نما کے مرکز پر ہے -

اگر تراش کے ایک نیم قطر کا طول ر ہو اور اس نیم قطر کی سمتی جیوب التمام (لہ، مہ، نہ) ہوں تو نقطہ (لہ ر، مہ ر، نہ ر) مخروطی نما پر ہوگا -

$$\text{اس لیے}\quad \text{ا لہ}^{2}\text{ر}^{2} + \text{ب مہ}^{2}\text{ر}^{2} + \text{ج نہ}^{2}\text{ر}^{2} = 1$$

$$\text{لیکن}\quad \text{لہ}^{2} + \text{مہ}^{2} + \text{نہ}^{2} = 1$$

$$\text{اس لیے}\quad \text{لہ}^{2}(\text{ا ر}^{2} - 1) + \text{مہ}^{2}(\text{ب ر}^{2} - 1) + \text{نہ}^{2}(\text{ج ر}^{2} - 1) = 0$$

اس لیے دی ہوئی مستوی تراش کے وہ نیم قطر جن کے طول ر ہیں ذیل کے مخروط پر واقع ہوں گے -

$$\text{لا}^{2}(\text{ا ر}^{2} - 1) + \text{ما}^{2}(\text{ب ر}^{2} - 1) + \text{ی}^{2}(\text{ج ر}^{2} - 1) = 0$$

اگر دی ہوئی مستوی تراش کے نصف محوروں میں سے کسی ایک کا طول ر ہو تو دیا ہوا مستوی $\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی} = 0$ مندرجۂ بالا مخروط کو مس کرے گا -

تماس کی شرط حسب ذیل ہے :-

$$\frac{\text{ل}^{2}}{\text{ا ر}^{2} - 1} + \frac{\text{م}^{2}}{\text{ب ر}^{2} - 1} + \frac{\text{ن}^{2}}{\text{ج ر}^{2} - 1} = 0$$

یعنی $(\text{ر}^{2})^{2}(\text{ب ج ل}^{2} + \text{ج ا م}^{2} + \text{ا ب ن}^{2}) - \text{ر}^{2}\{(\text{ب} + \text{ج})\text{ل}^{2} + (\text{ج} + \text{ا})\text{م}^{2} + (\text{ا} + \text{ب})\text{ن}^{2}\}$

$$+ (\text{ل}^{2} + \text{م}^{2} + \text{ن}^{2}) = 0$$

یہ مساوات (ر^{2}) میں درجہ دوم کی ہے - اس کو حل کرنے سے مرکز دار مخروطی نما کی

دی ہوئی مستوی تراش کے نصف محوروں کے مربعوں کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

اگر ر^2 کی دونوں قیمتوں کی ایک ہی علامت ہو تو تراش ناقص ہوگی۔

اگر ر^2 کی قیمتیں مختلف العلامت ہوں تو تراش زائد ہوگی۔

فرض کرو کہ دی ہوئی تراش کے نصف محوروں کے مربعے ر$_1^2$ اور ر$_2^2$ ہیں۔

اگر ر$_1^2$ کے جواب کے نصف محور کی سمتی جیوب التمام (لہ$_1$، مہ$_1$، نہ$_1$) ہوں تو اس محور پر کے کسی نقطے پر مخروط لا^2 (ا ر$_1^2$ - ۱) + ما^2 (ب ر$_1^2$ - ۱) + ی^2 (ج ر$_1^2$ - ۱) = ۰ کے مماسی مستوی کی مساوات ہوگی

لہ$_1$ (ا ر$_1^2$ - ۱) لا + مہ$_1$ (ب ر$_1^2$ - ۱) ما + نہ$_1$ (ج ر$_1^2$ - ۱) ی = ۰

لیکن یہ دیا ہوا مماسی مستوی دیا ہوا مستوی ل لا + م ما + ن ی = ۰ ہے

اس لیے $\frac{\text{لہ}_1(\text{ا ر}_1^2-1)}{\text{ل}} = \frac{\text{مہ}_1(\text{ب ر}_1^2-1)}{\text{م}} = \frac{\text{نہ}_1(\text{ج ر}_1^2-1)}{\text{ن}}$

ان رشتوں سے (لہ$_1$، مہ$_1$، نہ$_1$) کے متناسب مقداریں حاصل ہوئی ہیں۔
یعنی دی ہوئی مستوی تراش کے اس محور کی سمتی جیوب التمام حاصل ہوئی ہیں جس کے نصف کا مربع ر$_1^2$ ہے۔

اسی طرح ر$_2^2$ کے جواب کے نصف محور کی سمتی جیوب التمام (لہ$_2$، مہ$_2$، نہ$_2$) حاصل کی جاسکتی ہیں۔

مشقی سوالات

۱۔ ثابت کرو کہ مستوی ل لا + م ما + ن ی = ۰ کے ذریعہ مرکزدار مخروطی نما ا لا^2 + ب ما^2 + ج ی^2 = ۱ کی جو تراش حاصل ہوتی ہے اس کے محور مخروط

$$\frac{\text{ل}(\text{ب}-\text{ج})}{\text{لا}} + \frac{\text{م}(\text{ج}-\text{ا})}{\text{ما}} + \frac{\text{ن}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{ی}} = 0$$

پر واقع ہیں۔

۲۔ مستوی $\text{لا} + \text{ما} + \text{ی} = 0$ کے ذریعہ ناقص نما $3\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ما}^2 + 6\,\text{ی}^2 = 1$ کی جو تراش حاصل ہوتی ہے اس کے نصف محوروں کے طول معلوم کرو۔

۳۔ مستوی $3\,\text{لا} + 4\,\text{ما} + 5\,\text{ی} = 0$ کے ذریعہ یک چادری زائد نما $2\,\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - \text{ی}^2 = 1$ کی جو تراش حاصل ہوتی ہے اس کے نصف محوروں کے طول معلوم کرو۔

۴۔ ناقص نما $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = 1$ کی تراش مستوی $\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} + \text{ن}\,\text{ی} = 0$ کے ذریعہ لی گئی ہے ثابت کرو کہ اس تراش (ناقص) کا رقبہ $\frac{\pi\,\text{ا ب ج}}{\text{ع}}$ ہے جہاں ع اس عمود کا طول ہے جو ناقص نما کے مرکز سے $\text{ل}\,\text{لا} + \text{م}\,\text{ما} + \text{ن}\,\text{ی} = 0$ کے متوازی مماسی مستوی پر نکالا جائے۔

۵۔ ثابت کرو کہ مخروط $\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}+\text{ج}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ج}+\text{ا}} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ا}+\text{ب}} = 0$ کے کسی مماسی مستوی کے ذریعہ مرکز دار مخروطی نما $\text{ا}\,\text{لا}^2 + \text{ب}\,\text{ما}^2 + \text{ج}\,\text{ی}^2 = 1$ کی جو تراش حاصل ہوتی ہے وہ ایک قائم زائد ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ ناقص نما $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = 1$ کی وہ تراش جو مستوی $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}}\sqrt{\text{ب}^2 - \text{ج}^2} = 0$ کے ذریعہ لی جائے ایک دائرہ ہے۔

(ھ) مکوّن

۱۱۔ خطوں والی سطحیں

مخروط ایک ایسی سطح ہے جو ایک خط مستقیم کی حرکت سے حاصل ہوتی ہے۔ مخروط کے کسی نقطہ کو مخروط کے راس سے ملانے والا خط مستقیم مخروط پر پورا پورا واقع ہوتا ہے۔

ایسا ہر خط مخروط کا **مکوّن** کہلاتا ہے۔

اسطوانہ بھی ایک ایسی سطح ہے جو ایسے خط کی حرکت سے جو اپنی سمت برقرار رکھتا ہے حاصل ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ متحرک خط کی سمتی جیوب التمام (لَ، مَ، نَ) ہیں۔ تب اسطوانہ کے کسی نقطہ میں سے کھنچا ہوا خط جس کی سمتی جیوب التمام (لَ، مَ، نَ) ہیں اسطوانہ پر پورا پورا واقع ہوگا۔ ایسا ہر خط اسطوانہ کا مکوّن کہلاتا ہے۔

ایسی سطحیں جو ایک خط مستقیم کی حرکت سے حاصل ہوتی ہیں **خطوں والی سطحیں** کہلاتی ہیں۔

درجۂ دوم کی سطحوں میں مخروط اور اسطوانہ خطوں والی سطحیں ہیں۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ یک چادری زائد نما اور زائدی مکافی نما بھی خطوں والی سطحیں ہیں۔

یک چادری زائد نما کی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = ۱$ کو ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}}\right)\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ی}}{\text{ج}}\right) = \left(۱ + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)\left(۱ - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)$$

اَب اُس خط مستقیم پر غور کرو جس کی مساواتیں حسب ذیل ہیں:-

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}}\right) &= \text{لہ}\left(۱ + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right) \\ \left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ی}}{\text{ج}}\right) &= \frac{1}{\text{لہ}}\left(۱ - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (\text{أ})$$

جہاں لہ اختیاری مستقل ہے۔

لہ کی تبدیلی کے ساتھ یہ خط (أ) اپنا مقام بدلتا ہے۔

نیز اس خط پر $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ی}}{\text{ج}}\right)\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ی}}{\text{ج}}\right) = \left(۱ + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)\left(۱ - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)$

یعنی خط (أ) کا ہر نقطہ یک چادری زائد نما $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = ۱$ پر واقع ہے۔

یعنی لہ کی مختلف قیمتوں کے جواب میں یک چادری زائد نما کے مکوّنوں کا ایک نظام حاصل ہوتا ہے۔ مکوّنوں کا یہ نظام لہ ۔ نظام کہلاتا ہے۔

اسی طرح خط

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{لا}{ا} - \frac{ی}{ج}\right) &= مہ \left(۱ + \frac{ما}{ب}\right) \\ \left(\frac{لا}{ا} + \frac{ی}{ج}\right) &= \frac{۱}{مہ}\left(۱ - \frac{ما}{ب}\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (\text{اا})$$

کی مساواتوں میں مہ کو مختلف قیمتیں دینے سے یک چادری زائد نما کے مکوّنوں کا دوسرا نظام حاصل ہوتا ہے۔ مکوّنوں کا یہ نظام مہ ۔ نظام کہلاتا ہے۔

آسانی سے یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ مکوّنوں کے لہ ۔ نظام کا کوئی رکن مکوّنوں کے مہ ۔ نظام کے کسی رکن پر منطبق نہیں ہے یعنی لہ اور مہ کو ایسی قیمتیں نہیں دی جا سکتی ہیں کہ خط (ا) خط (اا) پر منطبق ہو۔

جیسے جیسے لہ، − ∞ سے + ∞ تک بدلتا ہے خط (ا) کی حرکت سے یک چادری زائد نما پورا پورا مرتسم ہوتا ہے۔

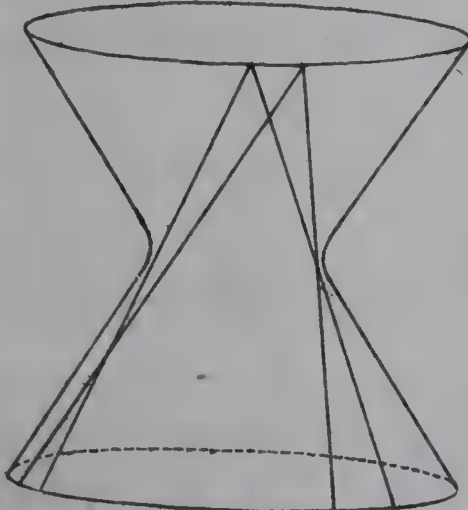
اسی طرح جیسے جیسے مہ، − ∞ سے + ∞ تک بدلتا ہے خط (اا) کی حرکت سے یک چادری زائد نما پورا پورا مرتسم ہوتا ہے۔

پس معلوم ہوا کہ یک چادری زائد نما

$$\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} - \frac{ی^۲}{ج^۲} = ۱$$

کی تکوین خطوں کے نظام (ا) اور (اا) میں سے ہر ایک کے ذریعہ ہوتی ہے۔

ذیل کی شکل میں یک چادری زائد نما کے مکوّن دکھائے گئے ہیں:۔



شکل ۴۲

اسی طرح زائدی مکافی نما کی مساوات $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} - \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = 2\,\text{ی}$ کو ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے :-

$$\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right) = 2\,\text{ی}$$

اب ذیل کے خط مستقیم پر غور کرو :-

$$\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right) = \frac{\text{ی}}{\text{لہ}} \;;\; \left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right) = 2\,\text{لہ} \quad \ldots\ldots\ldots (iii)$$

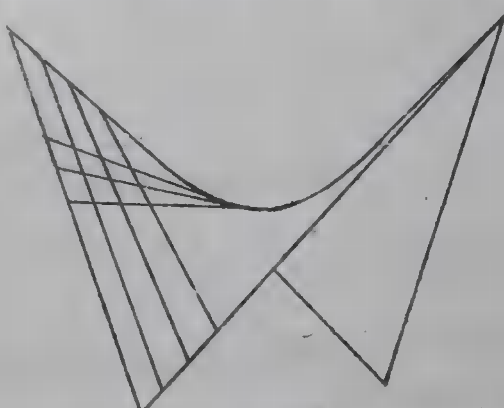
$$\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right) = \frac{\text{ی}}{\text{مہ}} \;;\; \left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right) = 2\,\text{مہ} \quad \ldots\ldots\ldots (iv)$$

ظاہر ہے کہ خطوط (iii) اور (iv) میں سے ہر ایک کے ذریعہ، جبکہ لہ اور مہ تمام حقیقی قیمتیں اختیار کرتے ہیں، زائدی مکافی نما کی تکوین ہوتی ہے۔
زائدی مکافی نما کے مکوّنوں کے یہ نظام ترتیب وار لہ۔ اور مہ۔ نظام کہلاتے ہیں۔

زائدی مکافی نما کے مکوّنوں کے لہ نظام کا ہر رکن متوی $\frac{لا}{ا} - \frac{ما}{ب} = ۰$ کے متوازی ہے اور مہ - نظام کا ہر رکن متوی $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۰$ کے متوازی ہے۔

یعنی زائدی مکافی نما $\frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۲ ی$ کا ہر مکوّن متویوں $\frac{لا}{ا} \pm \frac{ما}{ب} = ۰$ میں سے کسی ایک کے متوازی ہوتا ہے۔

ذیل کی شکل میں زائدی مکافی نما کے مکوّن دکھائے گئے ہیں:-



شکل ۴۳

۱۲ — باب (۹) دفعہ (۱) میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک خطِ مستقیم اور مخروطی نما کے نقاطِ تقاطع کے فاصلے خط پر کے ایک دیے ہوئے نقطے سے معلوم کرنے کے لیے ر میں درجۂ دوم کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اگر ر کی دو سے زیادہ قیمتوں کے لیے یہ مساوات پوری ہوتی ہے تو اس مساوات میں $ر^۲$ کا سر = ۰، ر کا سر = ۰ اور رقم مطلق = ۰

اس صورت میں یہ مساوات ر کی ہر قیمت کے لیے پوری ہوگی یعنی خط پورا پورا مخروطی نما پر واقع ہوگا۔

پس معلوم ہوا کہ اگر ایک خط اور مخروطی نما کے نقاطِ تقاطع دو سے زیادہ ہیں (مثلاً تین ہیں) تو خط پورا پورا مخروطی نما پر واقع ہوگا یعنی خط مخروطی نما کا مکوّن ہوگا۔

اس نتیجہ کی مدد سے ہم اس کے لیے شرائط معلوم کر سکتے ہیں کہ ایک دیا ہوا خط مخروطی نما کا مکوّن ہو۔

پس خط مستقیم (لا − لا۱)/ل = (ما − ما۱)/م = (ی − ی۱)/ن، مخروطی نما ف (لا، ما، ی) = ۰

کا مکوّن ہوگا اگر (۱) ال^{2} + ب م^{2} + ج ن^{2} + ۲ ف م ن + ۲ گ ن ل + ۲ ھ ل م = ۰

(۲) ل (جف ف / جف لا۱) + م (جف ف / جف ما۱) + ن (جف ف / جف ی۱) = ۰

اور (۳) ف (لا۱، ما۱، ی۱) = ۰

شرط (۳) اس امر کی شرط ہے کہ نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) مخروطی نما ف (لا، ما، ی) = ۰ پر ہو۔ یہ شرط یونہی ظاہر ہے۔

شرط (۲) اس امر کی شرط ہے کہ دیا ہوا خط مخروطی نما کے نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر کے عماد کے ساتھ زاویہ قائمہ بنائے۔ چونکہ دیا ہوا خط نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) میں سے گذرتا ہے اس لیے شرط (۲) کی مدد سے حاصل ہوتا ہے کہ مکوّن نقطہ (لا۱، ما۱، ی۱) پر کے مماسی مستوی پر ہے۔

شرط (۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ مبداء میں سے مکوّن کے متوازی کھنچا ہوا خط، مخروط الا^{2} + ب ما^{2} + ج ی^{2} + ۲ ف ما ی + ۲ گ ی لا + ۲ ھ لا ما = ۰ کا مکوّن ہے۔ یہ مخروط **متقاربی مخروط** (Asymptotic Cone) کہلاتا ہے۔

۱۳ — اب ہم ثابت کریں گے کہ اگر مرکز دار مخروطی نما پر ایک خطِ مستقیم پورا پورا واقع ہو تو یہ مرکز دار مخروطی نما ایک چادری زائد نما ہوگا۔

مرکز دار مخروطی نما الا^{2} + ب ما^{2} + ج ی^{2} = ۱ پر

خط مستقیم (لا − لا۱)/ل = (ما − ما۱)/م = (ی − ی۱)/ن

پورا پورا واقع ہوگا اگر (۱) ال^{2} + ب م^{2} + ج ن^{2} = ۰

(۲) الا۱ل + ب ما۱م + ج ی۱ن = ۰

اور (۳) الا۱^{2} + ب ما۱^{2} + ج ی۱^{2} − ۱ = ۰

چونکہ (ال^{2} + بم^{2}) (الا$_{1}^{2}$ + بما$_{1}^{2}$) − (ال لا$_{1}$ + بم ما$_{1}$)^{2} ≡ اب (لا$_{1}$م − ما$_{1}$ل)^{2}

اس لیے مندرجۂ بالا شرائط کی مدد سے

(−ج ن^{2}) (۱ − ج ی$_{1}^{2}$) − (−ج ن ی$_{1}$)^{2} = اب (لا$_{1}$م − ما$_{1}$ل)^{2}

یعنی −ج ن^{2} = اب (لا$_{1}$م − ما$_{1}$ل)^{2}

چونکہ سب مقداریں حقیقی ہیں، اس لیے ضروری ہے کہ

(اب) اور ج مختلف العلامت ہوں۔

یہ شرط صرف اس صورت میں پوری ہوتی ہے جبکہ مقادیر ا، ب، ج میں سے کوئی دو مثبت اور تیسری مقدار منفی ہو۔ اس صورت میں مساوات الا^{2} + بما^{2} + ج ی^{2} = ۱ سے یک چادری زائد نما تعبیر ہوتا ہے۔

پس ثابت ہوا کہ خطوں والا مرکز دار مخروطی نما صرف یک چادری زائد نما ہے۔

۱۴ — یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر مکافی نما پر ایک خط مستقیم پورا پورا واقع ہو تو یہ مکافی نما زائدی مکافی نما ہوگا۔

مکافی نما الا^{2} + بما^{2} = ۲ ی پر

خط مستقیم $\frac{\text{لا} - \text{لا}_{1}}{\text{ل}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_{1}}{\text{م}} = \frac{\text{ی} - \text{ی}_{1}}{\text{ن}}$

پورا پورا واقع ہوگا اگر (۱) ال^{2} + بم^{2} = ۰

(۲) الا$_{1}$ل + بما$_{1}$م − ن = ۰

اور (۳) الا$_{1}^{2}$ + بما$_{1}^{2}$ − ۲ ی$_{1}$ = ۰

چونکہ ا، ب، ل، م سب حقیقی ہیں، اس لیے رشتہ (۱) سے ظاہر ہے کہ مقادیر ا اور ب کی علامتیں مختلف ہیں۔ اس صورت میں مساوات الا^{2} + بما^{2} = ۲ ی سے زائدی مکافی نما تعبیر ہوتا ہے۔

پس ثابت ہوا کہ خطوں والا مکافی نما صرف زائدی مکافی نما ہے۔

۱۵ — چونکہ یک چادری زائد نما یا زائدی مکافی نما کونوں کے لہ۔ نظام اور

مہ ۔ نظام میں سے ہر ایک سے پورا پورا منقسم ہوتا ہے، اس لیے ضروری ہے کہ یک چادری زائد نما اور زائدی مکافی نما کے ہر نقطہ میں سے مکوّنوں کے لہ ۔ نظام اور مہ ۔ نظام کا ایک ایک رکن گذرے ۔

فرض کرو کہ مخروطی نما کے نقطہ ن میں سے مکوّنوں کے لہ ۔ نظام کا رکن ک$_1$ اور مہ ۔ نظام کا رکن ک$_2$ گذرتا ہے ۔ چونکہ خطوط ک$_1$، ک$_2$ میں سے ہر ایک مخروطی نما کو نقطہ ن پر کے دو منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے اس لیے ک$_1$ اور ک$_2$ نقطہ ن پر کے مماسی خط ہیں ۔ اس لیے نقطہ ن میں سے گذرنے والے مکوّنوں ک$_1$ اور ک$_2$ میں سے گذرنے والا مستوی نقطہ ن پر کا مماسی مستوی ہے ۔ یعنی نقطہ ن پر کا مماسی مستوی مخروطی نما کو دو خطوں پر کاٹتا ہے جو نقطہ ن میں سے گذرنے والے مکوّن ہیں اور ان مکوّنوں میں سے ایک لہ ۔ نظام کا رکن ہے اور دوسرا مہ ۔ نظام کا رکن ہے ۔

اَب یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ہر خطِ مستقیم جو مخروطی نما پر پورا پورا واقع ہو مکوّنوں کے لہ ۔ نظام یا مہ ۔ نظام کا رکن ہوگا ۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ خطِ مستقیم ک جو مخروطی نما پر پورا پورا واقع ہے مکوّنوں کے لہ ۔ نظام اور مہ ۔ نظام میں سے کسی کا بھی رکن نہیں ہے ۔

خطِ مستقیم ک کے کسی نقطہ ن میں سے لہ ۔ نظام اور مہ ۔ نظام کے رکن ک$_1$، ک$_2$ کھینچو ۔ ک$_1$، ک$_2$ میں سے گذرنے والا مستوی نقطہ ن پر کا مماسی مستوی ہوگا ۔ چونکہ خط ک مخروطی نما کو نقطہ ن پر کے دو منطبق نقطوں پر قطع کرتا ہے، اس لیے خط ک نقطہ ن پر کا ایک مماسی خط ہے ۔ اس لیے خط ک بھی نقطہ ن پر کے مماسی مستوی پر واقع ہے ۔ اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ ن پر کا مماسی مستوی مخروطی نما کو تین خطوطِ مستقیم ک$_1$، ک$_2$ اور ک پر قطع کرتا ہے جو ناممکن ہے کیونکہ ہر مستوی سطح مخروطی نما کو صرف درجہ دوم کے منحنی پر قطع کرتی ہے ۔ پس یہ مفروض کہ خط ک مکوّنوں کے لہ ۔ نظام یا مہ ۔ نظام کا رکن نہیں ہے غلط ہے ۔ اس لیے ثابت ہوا کہ خط ک جو مخروطی نما پر پورا پورا واقع ہے مکونوں کے دو نظاموں میں سے کسی ایک نظام کا رکن ہے ۔ [اس سلسلہ میں ذیل کے سوال ۵، ۶ حل کیے جائیں] ۔

آسانی سے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ مکوّن میں سے گذرنے والا ہر مستوی مخروطی نما کا مماسی مستوی

ہوتا ہے اور نقطہ تماس اس تکوین پر واقع ہوتا ہے۔

مشقی سوالات

۱— ایک چادری زائد نما $\frac{\text{لا}^2}{4} + \frac{\text{ما}^2}{9} - \frac{\text{ی}^2}{16} = 1$ کے نقطہ (۲، ۳، -۴) میں سے گذرنے والے تکوینوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

۲— ایک چادری زائد نما $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = 1$ کے نقطہ (ا جم عہ، ب جب عہ، ۰) میں سے گذرنے والے تکوینوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

۳— ناقص ی = ج، $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے مزدوج قطر ج ن، ج ق ہیں اور ناقص ی = -ج، $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے مزدوج قطر جَ نَ، جَ قَ ہیں جو ج ن، ج ق کے متوازی اسی سمت میں لیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ خطوط ن قَ، نَ ق میں سے ہر ایک سے ایک چادری زائد نما $\frac{2\,\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{2\,\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = 1$ کی تکوین ہوتی ہے۔

۴— زائدی مکافی نما (لا + ما + ی) (۲ لا + ما - ی) = ۶ ی کے اُن تکوینوں کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۱، ۱) میں سے گذرتے ہیں۔

۵— ثابت کرو کہ تکوینوں کے ایک ہی نظام کے کوئی دو رکن ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے یعنی ایک ہی نظام کے کوئی دو رکن ہم مستوی نہیں ہیں۔

۶— ثابت کرو کہ تکوینوں کے ایک نظام کا ہر رکن دوسرے نظام کے ہر رکن کو قطع کرتا ہے۔

۷— ایک چادری زائد نما $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = 1$ کی صدر ناقصی تراش پر (یعنی اس تراش پر جو مستوی ی = ۰ کے ذریعہ لی گئی ہے) دو نقطے ن اور ق ہیں جن کے خارج المرکز زاویے عہ، بہ ہیں۔ ن میں سے

گذرنے والے لہ۔ مکوّن اور ق میں سے گذرنے والے مہ۔ مکوّن کے نقطہ تقاطع مر کے محدد معلوم کرو۔

۸ — ایک چادری زائد نما $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} - \frac{ی^2}{ج^2} = ۱$ پر کا ایک نقطہ

سا (ا جم طہ قط فہ، ب جب طہ قط فہ، ج مس فہ) ہے۔ سا میں سے گذرنے والے مکوّنوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

۹ — اگر ایک چادری زائد نما کے ایک لہ۔ مکوّن پر کا کوئی نقطہ (ا جم طہ قط فہ، ب جب طہ قط فہ، ج مس فہ) ہو تو ثابت کرو کہ (طہ - فہ) مستقل ہے۔ نیز اگر مہ۔ مکوّن پر کا کوئی نقطہ (ا جم طہ قط فہ، ب جب طہ قط فہ، ج مس فہ) ہو تو ثابت کرو کہ (طہ + فہ) مستقل ہے۔

۱۰ — زائدی مکافی نما $\frac{لا^2}{۴} - \frac{ما^2}{۹} = ی$ کے نقطہ (۴، ۳، ۳) میں سے گذرنے والے مکوّنوں کی مساواتیں معلوم کرو۔

تمّت